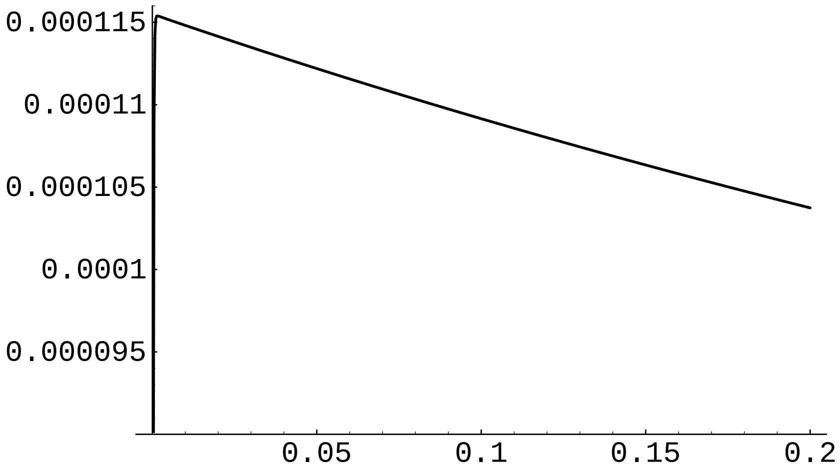
Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T 3

12. laskuharjoitukset (viikko 49) Tuomela, Nevanlinna/Havu

Alkuviikko

1. Halutaan ratkaista Eulerin menetelmällä tehtävä
$$x' = ax - bx^2, \quad x(0) = c$$
missä vakiot a, b ja c ovat positiivisia (9. harjoitus, alkuviikon 2. tehtävä). Linearisoi positiivisen tasapainopisteen ympäristössä ja arvioi tämän avulla stabiilisuusehtoa.
2. Tarkastellaan tehtävää
$$x' = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 2 & -9 & 3 \\ -1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$
Ratkaistaan Eulerin menetelmällä. Anna riittävä stabiilisuusehto laskematta ominaisarvoja.
3. Tarkastellaan lineaarisen alkuarvotehtävän
$$x' = \begin{pmatrix} -501 & 500 \\ 500 & -501 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
numeerista ratkaisemista. Yhtälön tarkka ratkaisu on $x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-1001t})$, $x_2(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-1001t})$. a) Jos tehtävä ratkaistaan käyttämällä Eulerin menetelmää, niin arvioi stabiilisuusehtoa, kuten edellisessä tehtävässä. Totea, että stabiilisuusehto on niin tiukka, ettei ratkaisu Eulerin menetelmällä ole mielekästä. b) Laske ratkaisu välillä $[0, 1]$ käyttäen implisiittistä Eulerin menetelmää vakioaskeleella $h = 1/4$. Vertaa tarkkaan ratkaisuun.
4. Tunnettu esimerkki kankeasta difyhtälöstä on
$$\begin{aligned} x_1' &= -c_1 x_1 + c_2 x_2 x_3 \\ x_2' &= c_1 x_1 - c_2 x_2 x_3 - c_3 x_2^2 \\ x_3' &= c_3 x_2^2 \end{aligned}$$
missä x_1, x_2 ja x_3 kuvaavat kolmen eri aineen konsentraatioita ajan funktiona. Tehtävän kankeutta tietyn pisteen ympäristössä voi tutkia linearisoimalla, ja katsomalla onko linearisoidussa systeemissä hyvin erisuuria ominaisarvoja. Käytä arvoja $c_1 = 0.04$ (hidas reaktio), $c_2 = 10^4$ (nopea) ja $c_3 = 3 \cdot 10^7$ (hyvin nopea). Jos alkuehto on $x(0) = (10, 0, 0)$, niin hetkellä $t = 0.1$ ratkaisu on

noin $(9.96, 1.1\cdot 10^{-4}, 0.038)$. Tutki Gershgorinin lauseen avulla ominaisarvojen sijaintia tässä pisteessä. Ratkaisu käyttäytyy kvalitatiivisesti seuraavasti: x_1 vähenee ja x_3 kasvaa monotonisesti, mutta x_2:lla on nopea transientti, minkä jälkeen sekin vähenee tasaisesti, katso oheinen kuva. Transientin jälkeen siis tarkkuuden puolesta voisi käyttää pitkää aika-askelta, mutta kankeuden takia eksplisiittiset menetelmät eivät voi tehdä niin.



5. Tässä ja seuraavassa tehtävässä on parasta käyttää Matlabia, Mathematicaa tai ainakin ohjelmoitavaa laskinta. Tarkastellaan tehtävää

$$x' = f(t,x) = -\lambda x + 10/(2+t^2) \qquad x(0) = 0$$

missä λ on jokin vakio ja ratkaisu halutaan välillä $[0,2]$. Kokeile Heunin menetelmää kun $\lambda = 200$. Mitä huomaat? Ratkaise sitten tehtävä toisen kertaluvun BDF:llä.

$$3x^{n+2} - 4x^{n+1} + x^n = 2hf(t_{n+2}, x^{n+2})$$

Koska tehtävä on lineaarinen, niin x^{n+2}:n ratkaisu ei tässä tapauksessa aiheuta ongelmia. Tarvitset 'ylimääräisen' alkuarvon x^1. Käytä katkaistua Taylorin kehitelmää seuraavasti. Olkoon $f = f(0,0)$, $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}(0,0)$ ja $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Asetetaan

$$x^1 = x(0) + x'(0)h + h^2x''(0)/2 = fh + (f_t + f_x f)h^2/2 = 5h - 5\lambda h^2/2$$

6. Tarkastellaan Hamiltonin systeemiä (11. harjoitus, alkuviikon 2. tehtävä)

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_1^2, \end{cases}$$

Ratkaise Heunin menetelmällä käyttäen alkuarvoa $x(0) = (0.5, 0.1)$. Kokeile eri h:n arvoja. Ratkaisun pitäisi olla jaksollinen. Näyttääkö numeerinen ratkaisu jaksolliselta? Olkoon sitten $y = x_1$; eliminoimalla x_2 saadaan $y'' = f(y)$, missä $f(y) = -y + y^2$ ja ottamalla samat alkuehdot saadaan $y(0) = 0.5$ ja $y'(0) = 0.1$. Ratkaise tämä menetelmällä

$$y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1} = h^2 f(y^n)$$

Näyttäkö y^n jaksolliselta? Tarvitaan siis 'ylimääräinen' alkuarvo y^1. Koska $y''(0) = f(y(0))$, niin katkaistu Taylorin sarja antaa

$$y^1 = y(0) + hy'(0) + h^2 y''(0)/2 = 0.5 + 0.1h - 0.125h^2$$