Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T 3

11. laskuharjoitukset (viikko 48) Tuomela, Nevanlinna/Havu

Alkuviikko

(1) Hahmottele tasoon seuraavissa tapauksissa jokin vektorikenttä, jolla on kyseiset ominaisuudet.
  a) 1 epästabiili jaksollinen ratkaisu, 3 tasapainopistettä, joista 1 on satulapiste ja 2 nielua.
  b) 1 stabiili fokus, 2 jaksollista ratkaisua, joista toinen on stabiili ja toinen epästabiili.

(2) Tarkastellaan seuraavaa Hamiltonin systeemiä

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_1^2, \end{cases}$$

Mikä on Hamiltonin funktio? Tutki tasapainopisteitten laatua. Piirrä kuva. Missä tason alueissa esiintyy jaksollisia/'jaksottomia' ratkaisuja?
Olkoon $H : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ja määritellään

$$\begin{cases} x_1' = \partial H/\partial x_2 \\ x_2' = -\partial H/\partial x_1 \end{cases}$$

Tätä systeemiä sanotaan Hamiltonin systeemiksi ja H:ta vastaavaksi Hamiltonin funktioksi.

(3) Voidaan osoittaa: jos on olemassa tasossa jokin rajoitettu positiivisesti invariantti joukko (pruju, s. 43), jossa *ei* ole tasapainopisteitä, niin kyseisessä alueessa on stabiili jaksollinen ratkaisu. Osoita tämän avulla, että tehtävällä

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) \end{cases}$$

on stabiili jaksollinen ratkaisu. (Siirry napakoordinaatteihin ja näytä, että $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1/2 < |x| < 1/\sqrt{2}\}$ toteuttaa ehdot.)

(4) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ja oletetaan että $\nabla \cdot f$ on samanmerkkinen, siis joko positiivinen tai negatiivinen, yhdesti yhtenäisessä tason alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Osoita että tällöin yhtälösysteemillä $x' = f(x)$ ei voi olla jaksollista ratkaisua alueessa Ω. Vihje: sovella Gaussin lausetta

$$\int_\Omega \nabla \cdot f = \int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle$$

Yhdesti yhtenäinen alue tasossa tarkoittaa: yhtenäinen alue, jossa ei ole reikiä.

(5) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + c \end{cases}$$

missä c on vakio. Osoita edellisen tehtävän tuloksen avulla, että jos tehtävällä on jaksollinen ratkaisu, niin a) kyseinen ratkaisu kiertää origon tai b) leikkaa ympyrän $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1/\sqrt{2}\}$.

(6) Tutki seuraavien napakoordinaateissa annettujen systeemien tasapainopisteitten/jaksollisten ratkaisujen laatua eri parametrin μ arvoilla. Piirrä kuvat.

$$\begin{cases} r' = r(\mu - r)(\mu - 2r) \\ \theta' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} r' = r^2 \\ \theta' = 1 - \mu^2 \end{cases}$$

Loppuviikko

(1) Tarkastellaan differenssiyhtälöä

$$x^{n+2} + ax^{n+1} + bx^n = 0$$

Millä parametrien a ja b arvoilla jono x^n pysyy rajoitettuna? Tässä siis n on indeksi, eikä potenssi. Milloin jono lähestyy nollaa? Entä milloin se pysyy rajoitettuna? Piirrä kuva (a, b) tasoon. Vertaa yhtälöön $x'' + ax' + bx = 0$.

(2) Tarkastellaan seuraavaa Runge-Kutta menetelmää tehtävän $x' = f(t, x)$ ratkaisemiseksi.

$$\begin{aligned} k^1 &= f(t_n, x^n) \\ k^2 &= f(t_n + 2h/3, x^n + 2hk^1/3) \\ k^3 &= f(t_n + 2h/3, x^n + h(k^1 + 3k^2)/6) \\ x^{n+1} &= x^n + h(k^1 + k^2 + 2k^3)/4 \end{aligned}$$

Osoita, että tämän menetelmän kertaluku on 3 soveltamalla sitä testiyhtälöön $x' = x, \quad x(0) = 1$. Siis: laske yhden askeleen tuottama x^1 ja vertaa sitä yhtälön tarkkaan ratkaisuun $x(h)$. Tällöin pitaisi olla $|x^1 - x(h)| = O(h^4)$

(3) Tarkastellaan trapetsimenetelmää

$$x^{n+1} - x^n = \frac{h}{2}\Big(f(t_{n+1}, x^{n+1}) + f(t_n, x^n)\Big)$$

Tämä on toisen kertaluvun menetelmä. Ratkaistaan sillä testiyhtälöä $x' = \lambda x$, $x(0) = 1$, missä $\lambda \in \mathbb{C}$. Menetelmän stabiilisuusalue on niitten kompleksilukujen $\mu = \lambda h$ joukko, joille menetelmä antaa rajoitetun ratkaisun testiyhtälöön sovellettuna. Näytä, että trapetsimenetelmän stabiilisuusalue on $\{\mu \in \mathbb{C} \mid \Re\mu \leq 0\}$.

(4) Mikä on seuraavan moniaskelmenetelmän kertaluku?

$$7x^{n+2} - 8x^{n+1} + x^n = h\Big(10f(t_{n+1}, x^{n+1}) - 4f(t_n, x^n)\Big)$$

Kuuluuko origo stabiilisuusalueeseen? Kertaluku lasketaan samaan tapaan kuin 2. tehtävässä. Sovelletaan menetelmää testiyhtälöön $x' = x$, $x(0) = 1$ ja näytetään, että $|x^2 - x(2h)| = O(h^{p+1})$. Tällöin kertaluku on p. Huomaa, että tarvitset 'ylimääräisen' alkuarvon x^1. Käytä tarkkaa arvoa $x^1 = e^h$.

(5) Tässä ja seuraavassa tehtävässä on parasta käyttää Matlabia, Mathematicaa tai ainakin ohjelmoitavaa laskinta. Tutki numeerisesti edellisen tehtävän menetelmän kertalukua seuraavasti. Ratkaise tehtävä $x' = -x^2$, $x(0) = 1$ hetkellä $t = 2$ käyttäen askelpituuksia h, $h/2$, $h/4, \dots$. Jos menetelmän kertaluku on yksi, niin niin virheen pitäisi puolittua, kun h puolittuu, jos taas kaksi, niin virheen pitäisi mennä neljäsosaan, kun h puolittuu jne. Tutki siis miten virhe pienenee ja päättele tästä kertaluku.

(6) Tarkastellaan tehtävää

$$x' = -x + t^{1/10}(t + 11/10) \qquad x(0) = 0$$

Totea, että ratkaisu on $x(t) = t^{11/10}$. Laske ratkaisu hetkellä $t = 1$ Heunin menetelmällä (pruju, s. 56) käyttäen askelpituuksia h, $h/2$, $h/4, \dots$. Koska menetelmän kertaluku on kaksi, niin virheen pitäisi mennä neljäsosaan, kun h puolittuu. Käykö näin?