Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T 3

10. laskuharjoitukset (viikko 47) Tuomela, Nevanlinna/Havu

Alkuviikko

1. Etsi seuraavien funktioiden Lipschitz-vakio annetussa alueessa:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad f(x) = |x|, \quad -\infty < x < \infty \\
&b) \quad f(x) = 1/x, \quad 1 \le x < \infty \\
&c) \quad f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

2. Osoita, että Lipschitz-jatkuva funktio on jatkuva.
3. Sovella Picard-Lindelöfin iteraatiota tehtävän $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$, $x(0) = (0, 1)$ ratkaisemiseen ja osoita, että

$$x_1^{2n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \quad \forall\, n \ge 0.$$

Vertaa tarkan ratkaisun komponenttiin $x_1(t)$.

4. Osoita napakoordinaatteja käyttämällä, että monisteen esimerkin 3.8 (s. 28) systeemin yleinen ratkaisu on

$$x_1(t) = \frac{\cos(t - c_1)}{\sqrt{1 + c_2 e^{-2t}}}, \quad x_2(t) = \frac{-\sin(t - c_1)}{\sqrt{1 + c_2 e^{-2t}}}.$$

Miten ratkaisu käyttäytyy kun $t \to \infty$?

5. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_1 x_2 - 2x_2^3 \\ x_2' = x_1 + x_2 - x_2^2 \end{cases}$$

virtaus. Vihje: sijoita $y_1 = x_1 - x_2^2$.

6. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2^2 \\ x_2' = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

tasapainopisteet. Linearisoi systeemi näissä. Minkä laatuisia lineaariset systeemit ovat? Voidaanko tämän perusteella päätellä alkuperäisen systeemin käyttäytyminen tasapainopisteitten ympäristössä? Piirrä kuva.

Loppuviikko

1. Kuvataan kilpailevien lajien populaatiodynamiikkaa yhtälöillä
$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(2 - x_1 - x_2) \\ x_2' &= x_2(3 - 2x_1 - x_2) \end{aligned}$$
Selitä miksi tämän mallin mukaan on matemaattisesti mahdollista, mutta erittäin epätodennäköistä, että molemmat lajit säilyvät pitkällä aikavälillä. Piirrä kuva. (Ohje: x_1 ja x_2 ovat populaatioiden kokoja, joten riittää tarkastella aluetta $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.)
2. Mille seuraavista systeemeistä $x' = f(x)$ origo on stabiili tasapainopiste?
$$a)\ f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \qquad b)\ f(x) = \begin{pmatrix} x_2(1 + x_1^2 + x_2^2) \\ x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2 \end{pmatrix}$$
3. Tarkastellaan systeemiä
$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1x_2 \\ x_2' &= x_2^2 - x_1^3 \end{aligned}$$
Linearisoinnin avulla ei voida päätellä ratkaisun käyttäytymistä origon ympäristössä. Miksi? Selvitä tämä käyttäytyminen tutkimalla yhtälöä
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2^2 - x_1^3}{2x_1x_2}$$
sijoituksen $y = x_2^2$ avulla.
4. Tarkastellaan napakoordinaateissa annettua dynaamista systeemiä $r' = g(r)$, $\theta' = 1$, missä $g(r) = r^2 \sin(1/r)$, kun $r > 0$ ja $g(r) = 0$, kun $r = 0$. Osoita että origo on stabiili tasapainopiste.
5. Osoita, että $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ on tarkka Ljapunovin funktio origossa seuraaville systeemeille.
$$a) \quad \begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1^3 \\ x_2' = x_1 - x_2^3 \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} x_1' = -x_1 - 2x_2^2 \\ x_2' = 2x_1x_2 - x_2^3 \end{cases}$$
Mitkä ovat vastaavat stabiilisuusalueet? Huomaa, että kummassakaan tapauksessa linearisoinnin perusteella stabiilisuutta ei voi todistaa.
6. Etsi seuraavien systeemien Ljapunovin funktiot:
$$a) \quad \begin{cases} x_1' = -x_1 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ x_2' = x_1^2 - x_2^3 + x_1x_2 \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} x_1' = -3x_1^3 - x_2 \\ x_2' = x_1^5 - 2x_2^3 \end{cases}$$