TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 9
11.11–18.11.2002

1. Olkoon $N_1(\underline{t}) = \chi_{[0,1)}(\underline{t})$, eli $N_1(t) = 1$ kun $0 \le t < 1$ ja $N_1(t) = 0$ muuten, ja olkoon $N_m = N_{m-1} * N_1$ kun $m \ge 2$. Osoita, että löytyy jono c siten, että $(\varphi(\underline{x} - n))_{n\in Z}$ on ortonormaali joukko avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$ kun $\varphi(\underline{x}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(k)N_2(x-k)$. (Aikaisemmin on osoitettu, että $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{N_2}(\omega+k)|^2 = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos(\pi\omega)^2$.) Päteekö $\varphi(\underline{x}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(k)\varphi(2\underline{x}-k)$ jollain jonolla α (kun oletetaan tunnetuksi, että $N_2(\underline{x}) = 2\sum_{k=0}^{2} a(k)N_2(2\underline{x}-k)$ missä $a(0) = a(2) = \frac{1}{4}$ ja $a(1) = \frac{1}{2}$)?

Olkoon nyt

$$\Phi(\underline{t}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\varphi(x+\underline{t})\,\mathrm{d}x.$$

Osoita, että Φ on jatkuvasti derivoituva funktio, joka jokaisella välillä $[n, n+1]$ on jokin korkeintaan astetta 3 oleva polynomi, eli Φ on kuutiosplini-interpoloinnin perusinterpolointifunktio.

2. Olkoon

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k \underline{t}),$$

missä $0 < a < 1$ ja $b > 1$. Olkoon lisäksi

$$\psi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(t-\frac{1}{b})^{-2}-(t-b)^{-2}+(1-\frac{1}{b})^{-2}+(1-b)^{-2}}, & \frac{1}{b} < t < b, \\ 0, & t \le \frac{1}{b} \text{ tai } t \ge b. \end{cases}$$

jolloin tiedetään, että ψ ja $\hat{\psi} \in \mathcal{C}_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$. Määritellään

$$f_j(\underline{t}) = b^j \int_{-\infty}^{\infty} w(\underline{t}-s)\hat{\psi}(b^j s)\,\mathrm{d}s.$$

Osoita, että

$$f_j(\underline{t}) = \tfrac{1}{2}a^j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi b^j \underline{t}}.$$

3. Olkoot w, ψ ja f_j, $j \ge 1$ kuten edellisessä tehtävässä. Oleta, että w on derivoituva pisteessä t, ja määrittele funktio v kaavalla

$$v(s) = \begin{cases} \dfrac{w(t-s) - w(t) + sw'(t)}{s}, & s \ne 0, \\ 0, & s = 0, \end{cases}$$

Onko v jatkuva ja rajoitettu? Osoita, kirjoittamalla $w(t-\underline{s}) = \underline{s}v(\underline{s}) + w(t) - \underline{s}w'(t)$, että

$$f_j(t) = b^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} sv\left(b^{-j}s\right)\hat{\psi}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Osoita, tämän nojalla, että $\lim_{j\to\infty} b^j f_j(t) = 0$. Millä tulon ab arvoilla saadaan silloin ristiriita edellisen tehtävän nojalla?