TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 5
14.10–21.10.2002

1. Olkoon α seuraava jono:

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= \tfrac{1}{8}(1+\sqrt{3}),\\
\alpha(1) &= \tfrac{1}{8}(3+\sqrt{3}),\\
\alpha(2) &= \tfrac{1}{8}(3-\sqrt{3}),\\
\alpha(3) &= \tfrac{1}{8}(1-\sqrt{3}),\\
\alpha(k) &= 0 \quad \text{muuten.}
\end{aligned}$$

Laske $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha(k)$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\alpha(k)$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k k\alpha(k)$, ja $2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha(k)\alpha(k+2n)$ kun $n\in\mathbb{Z}$. Mitä tämä merkitsee $\hat{\alpha}$:lle?

2. Oleta tunnetuksi seuraava Poissonin summakaava: Jos $f\in L^1(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$, sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+n)$ suppenee tasaisesti kun $t\in[-\delta,\delta]$ missä $\delta>0$ ja sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ suppenee, niin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n).$$

Osoita, tämän avulla, että jos funktiolla $\varphi\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ on kompakti kantaja ja $n\in\mathbb{N}$ on sellainen, että $\hat{\varphi}^{(j)}(m)=0$ kun $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ja $j=0,1,\ldots,n-1$ niin

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^j\varphi(\underline{x}+k) \quad \text{on astetta } j \text{ oleva polynomi}$$

kun $j=0,1,\ldots,n-1$.

3. Päteekö seuraava väite: Jos funktiolla $\varphi\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ on kompakti kantaja, $\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=1$, $\varphi(\underline{t})=2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha(k)\varphi(2\underline{t}-k)$, missä $\alpha(k)\neq 0$ ainoastaan äärellisen monella k ja missä funktiolla $\hat{\alpha}$ on n-kertainen nollakohta pisteessä $\frac{1}{2}$, niin jokainen korkeintaan astetta $n-1$ oleva polynomi voidaan kirjoittaa funktioiden $\varphi(\underline{t}-k)$ äärellisenä lineaarikombinaationa jokaisella rajoitetulla välillä.