TKK, Matematiikan laitos Gripenberg
Mat-1.510 Wavelet teoria
Harjoitus 10
18.11–25.11.2002

1. Olkoon H Hilbert-avaruus, jonka sisätulo on $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Osoita, että jos löytyy kaksi jonoa $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ja $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ siten, että

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle \, \overline{\langle g, g_n \rangle}, \quad f, g \in H,$$

ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\langle f, f_n \rangle|^2 + |\langle f, g_n \rangle|^2 \Big) \le C |f|^2, \quad f \in H,$$

jollakin vakiolla C, niin silloin $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ja $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ovat kehikkoja (frames) avaruudessa H.

2. Osoita, että jos ψ toteuttaa ehdon

$$|\hat{\psi}(\omega)| \le C \frac{|\omega|^{\alpha}}{1 + |\omega|^{\gamma}}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

missä C on jokin vakio ja $\gamma > \alpha > 0$, niin

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(a_*^m \omega) \right|^2 < \infty,$$

jos $a_* \neq 1$.
Vihje: Miksi voidaan olettaa, että $a_* > 1$ ja miten kannattaisi summaa $\sum_{m\in\mathbb{Z}}$ jakaa kahdeksi summaksi?

3. Oleta, että ψ toteuttaa ehdon

$$|\hat{\psi}(\omega)| \le C \frac{|\omega|^{\alpha}}{1 + |\omega|^{\gamma}}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

missä C on jokin vakio ja $\gamma > \alpha + 1 > 1$. Olkoon $a_* \neq 1$,

$$\beta(\underline{s}) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(a_*^m \omega) \right| \left| \hat{\psi}(a_*^m \omega + \underline{s}) \right|,$$

ja

$$\sigma(\underline{t}) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \sqrt{\beta(k\underline{t}) \beta(-k\underline{t})},$$

Osoita, että $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$.
Vihje: Seuraavat epäyhtälöt voivat olla hyödyllisiä, joten tarkista, että ne ovat voimassa: $\frac{|x|^{\alpha}}{1+|x|^{\gamma}} \frac{|x+s|^{\alpha}}{1+|x+s|^{\gamma}} \le \frac{|x|^{\alpha}}{|\frac{s}{2}|^{\gamma-\alpha}}$ kun $|s| > 2|x|$, $\frac{|x|^{\alpha}}{1+|x|^{\gamma}} \frac{|x+s|^{\alpha}}{1+|x+s|^{\gamma}} \le \frac{1}{|x|^{\gamma-\alpha} |\frac{s}{2}|^{\gamma-\alpha}}$ kun $|x| < |\frac{s}{2}|$ ja $\frac{|x|^{\alpha}}{1+|x|^{\gamma}} \frac{|x+s|^{\alpha}}{1+|x+s|^{\gamma}} \le \frac{1}{|x|^{\frac{\gamma-\alpha-1}{2}} |\frac{s}{2}|^{\frac{\gamma-\alpha+1}{2}}}$ kun $|x| \ge |\frac{s}{2}|$ joten tämä epäyhtälö pätee kun $|x| \ge 1$ ja $|s| \ge 2$.