Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 6, viikko 9

1. Lipschitz–Urysohn -lemma: Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A,B \subset X$ joukkoja, joille $d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b) > 0$. Osoita, että on olemassa Lipschitz-jatkuva funktio $f : X \to \mathbb{R}$, jolle $0 \leq f \leq 1$, $f(A) = \{0\}$ ja $f(B) = \{1\}$.

Ratkaisu Tietzen tapaan: Tietzen jatkolauseen Lipschitz-analogian nojalla funktio $g : A \cup B \to \mathbb{R}$, jolle $g(A) = \{0\}$ ja $g(B) = \{1\}$, voidaan jatkaa funktioksi $G : X \to \mathbb{R}$, jolle $G|_{A\cup B} = g$ ja $L(G) = L(g) = d(A,B)^{-1}$; itse asiassa kyseisen lauseen todistuksesta saadaan tälle eksplisiittinen kaava

$$G(x) = \inf_{a\in A}(g(a) + L(g)\ d(x,a)) = d(A,B)^{-1}\ d(x,A).$$

Määritellään $f : X \to \mathbb{R}$ siten, että $f = \min(G, \mathbb{I})$ eli $f(x) = \min(G(x), 1)$ eli

$$f(x) = \begin{cases} d(A,B)^{-1}\ d(x,A), & \text{kun } d(x,A) < d(A,B), \\ 1, & \text{kun } d(A,B) \leq d(x,A). \end{cases}$$

Tällöin f on haluttu funktio; samoin $f(x) = \max(0, 1 - d(A,B)^{-1} d(x,B))$ kelpaisi □

Huomautus. Jos $f_j : X \to \mathbb{R}$ on Lipschitz-kuvaus jokaisella $j \in J$, niin

$$L(\sup_{j\in J} f_j) \leq \sup_{j\in J} L(f_j), \quad L(\inf_{j\in J} f_j) \leq \sup_{j\in J} L(f_j),$$

mitkä seikat lukija helposti osoittaa.

Toinen konstruktio: Koska jokaisella $x \in X$ pätee

$$0 < d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b) \leq \inf_{a\in A, b\in B}(d(a,x) + d(x,b)) = d(A,x) + d(x,B),$$

voidaan määritellään $f : X \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x) = \frac{d(A,x)}{d(A,x) + d(x,B)}.$$

Nyt selvästi

$$0 \leq f \leq 1, \quad f(A) = \{0\}, \quad f(B) = \{1\}.$$

Käytetään ohessa lyhennysmerkintää $Sz := d(S,z)$, kun $S \subset X$ ja $z \in X$. Ota $x, y \in X$. Huomaa, että $Sx - d(x,y) \leq Sy \leq Sx + d(x,y)$. Saadaan

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{Ax}{Ax + Bx} - \frac{Ay}{Ay + By} = \frac{Ax\ By - Ay\ Bx}{(Ax + Bx)(Ay + By)} \\ &\leq \frac{Ax\ (Bx + d(x,y)) - (Ax - d(x,y))\ Bx}{(Ax + Bx)(Ay + By)} = \frac{d(x,y)}{Ay + By} \\ &\leq d(A,B)^{-1}\ d(x,y). \end{aligned}$$

Tästä seuraa $|f(x) - f(y)| \leq d(A,B)^{-1}\ d(x,y)$ jokaisella $x, y \in X$. Täten f on Lipschitz-kuvaus ja $L(f) = d(A,B)^{-1}$. Verrattuna aiempaan tämän konstruktion hyvänä puolena on se, että $f^{-1}(\{0\}) = \overline{A}$ ja $f^{-1}(\{1\}) = \overline{B}$ □

2. (a) Olkoon (X, d) metrinen avaruus, jolle $\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y) \leq 2$. Olkoon $e \notin X$ ja $X^+ = X \cup \{e\}$. Asetetaan $d(x, e) = d(e, x) = 1$ jokaisella $x \in X$. Olkoon $e \in X^+$ avaruuden X^+ kantapiste. Samaista $\operatorname{Lip}(X)$ ja $\operatorname{Lip}_0(X^+)$ isometrisesti.

   (b) Olkoon (X, d) metrinen avaruus kantapisteellä $e \in X$, $\operatorname{diam}(X) < \infty$. Osoita, että kuvaus $i = (f \mapsto f) : \operatorname{Lip}_0(X) \to \operatorname{Lip}(X)$ on jatkuva. Todista, että jos $d(x, e) \leq 1$ jokaisella $x \in X$, niin i on isometria.

Todistus.

(a) Selvästi (X^+, d) on metrinen avaruus (tässä tarvitaan oletus $\operatorname{diam}(X) \leq 2$). Jatketaan kuvaus $f \in \operatorname{Lip}(X)$ kuvaukseksi $f^+ : X^+ \to \mathbb{K}$ siten, että $f^+(e) = 0$. Ensinnäkin

$$\sup_{x \in X} \frac{|f^+(x) - f^+(e)|}{d(x, e)} = \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|_{C(X)}$$

ja toiseksi

$$\sup_{x,y \in X : x \neq y} \frac{|f^+(x) - f^+(y)|}{d(x, y)} = \sup_{x,y \in X : x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} = L(f),$$

joten $L(f^+) = \max(\|f\|_{C(X)}, L(f)) = \|f\|_{\operatorname{Lip}}$. Siis $(f \mapsto f^+) : \operatorname{Lip}(X) \to \operatorname{Lip}_0(X^+)$ on isometria. Olkoon $g \in \operatorname{Lip}_0(X^+)$. Tällöin selvästi $g|_X \in \operatorname{Lip}(X)$ ja $g = (g|_X)^+$, joten kyseinen isometria on bijektio.

(b) Olkoon avaruuden X *säde* $r(X) := \sup_{x \in X} d(x, e)$. Selvästi $r(X) \leq \operatorname{diam}(X) < \infty$. Ota $f \in \operatorname{Lip}_0(X)$. Nyt

$$\|f\|_{C(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in X} |f(x) - f(e)| \leq \sup_{x \in X} L(f)\ d(x, e) \leq L(f)\ r(X).$$

Siis $\|f\|_{\operatorname{Lip}} = \max(\|f\|_{C(X)}, L(f)) \leq L(f)\ \max(r(X), 1)$, mistä saadaan lineaarikuvauksen i normiksi $\|i\| \leq \max(r(X), 1) < \infty$.

Oletetaan, että $d(x, e) \leq 1$ jokaisella $x \in X$. Tässä tapauksessa $r(X) \leq 1$, joten $\|f\|_{C(X)} \leq L(f)$, edelleen $\|f\|_{\operatorname{Lip}} = L(f)$; toisin sanoen i on tällöin isometria $\square$

Huomautus. $i(\operatorname{Lip}_0(X))$ on avaruuden $\operatorname{Lip}(X)$ aliavaruus, jonka ko-dimensio on 1.

3. Olkoon X metrinen avaruus. Todista seuraavat väittämät:

(a) $\mathrm{Lip}(X)$ ja $\mathrm{Lip}_0(X)$ ovat Banach-avaruuksia (millä tahansa kantapisteellä).

(b) $\mathrm{Lip}(X)$ on topologinen algebra. Jos $\mathrm{diam}(X) < \infty$, niin $\mathrm{Lip}_0(X)$ ovat topologinen (ykkösetön) algebra.

Todistus.

(a) Olkoon $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathrm{Lip}(X)$ Cauchy-jono eli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon : \ n, m \geq M_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} < \varepsilon.$$

Tällöin $(f_n(x))_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ on Cauchy-jono jokaisella $x \in X$. Koska $\mathbb{C}$ on täydellinen, voidaan määritellä

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{C}.$$

On olemassa $C < \infty$, jolle $\|f_n\|_{\mathrm{Lip}} < C$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Siten $|f(x)| \leq C$ jokaisella $x \in X$. Ota $x, y \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Nyt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{M_\varepsilon}(x)| + |f_{M_\varepsilon}(x) - f_{M_\varepsilon}(y)| + |f_{M_\varepsilon}(y) - f(y)| \\ &\leq \varepsilon + C\ d(x,y) + \varepsilon; \end{aligned}$$

täten $|f(x) - f(y)| \leq C\ d(x,y)$ jokaisella $x, y \in X$, siis $L(f) \leq C$. On todistettu, että $f \in \mathrm{Lip}(X)$ ja $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq C$. Edelleen, $f_n \to f$ avaruudessa $\mathrm{Lip}(X)$, koska

$$\|f - f_{M_\varepsilon}\|_{C(X)} \leq \varepsilon \quad \text{ja} \quad L(f - f_{M_\varepsilon}) \leq \varepsilon,$$

sillä jos $n \geq M_\varepsilon$, niin

$$\begin{aligned} & |(f - f_{M_\varepsilon})(x) - (f - f_{M_\varepsilon})(y)| \\ \leq\ & |(f - f_{M_\varepsilon})(x) - (f_n - f_{M_\varepsilon})(x)| + |(f_n - f_{M_\varepsilon})(x) - (f_n - f_{M_\varepsilon})(y)| \\ & + |(f_n - f_{M_\varepsilon})(y) - (f - f_{M_\varepsilon})(y)| \\ \leq\ & |f(x) - f_n(x)| + L(f_n - f_{M_\varepsilon})\ d(x,y) + |f_n(y) - f(y)| \\ \leq\ & |f(x) - f_n(x)| + \varepsilon\ d(x,y) + |f_n(y) - f(y)| \to_{n\to\infty} \varepsilon\ d(x,y). \end{aligned}$$

Tapaus $\mathrm{Lip}_0(X)$ on samanlainen, jätetään lukijalle: jos $(g_n)_n \subset \mathrm{Lip}_0(X)$ Cauchy, niin $(g_n(x))_n \subset \mathbb{C}$ Cauchy, sillä $|g_n(x) - g_m(x)| = |(g_n - g_m)(x) - (g_n - g_m)(e)| \leq \ldots$

(b) Olkoot $f, g \in \mathrm{Lip}(X)$. Nyt

$$\|fg\|_{C(X)} = \sup_{x\in X} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| \ \sup_{y\in X} |g(y)| \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}\ \|g\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Edelleen,

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq L(f)\ d(x,y)\ \|g\|_{C(X)} + \|f\|_{C(X)}\ L(g)\ d(x,y), \end{aligned}$$

joten $L(fg) \leq L(f)\ \|g\|_{C(X)} + \|f\|_{C(X)}\ L(g) \leq 2\ \|f\|_{\mathrm{Lip}}\ \|g\|_{\mathrm{Lip}}$. On saatu

$$\|fg\|_{\mathrm{Lip}} \leq 2\ \|f\|_{\mathrm{Lip}}\ \|g\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Toki $\mathbb{I} = (x \mapsto 1) \in \mathrm{Lip}(X)$; $\mathrm{Lip}(X)$ on topologinen algebra.
Jos $\mathrm{diam}(X) < \infty$, $e \in X$ kantapiste ja $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, niin

$$|f(x)| = |f(x) - f(e)| \leq L(f)\ d(x,e) \leq L(f)\ \mathrm{diam}(X) < \infty,$$

joten $\|f\|_{C(X)} \leq L(f)\ \mathrm{diam}(X) < \infty$. Edeltävää todistusta mukaillen saadaan

$$L(fg) \leq L(f)\ \|g\|_{C(X)} + \|f\|_{C(X)}\ L(g) \leq 2\ \mathrm{diam}(X)\ L(f)\ L(g),$$

joten $\mathrm{Lip}_0(X)$ on (ykkösetön) topologinen algebra $\square$

4. Olkoon X metrinen avaruus kantapisteellä $e \in X$, $\iota = (x \mapsto m_{xe}) : X \to \mathrm{AE}(X)$.

(a) Olkoon F Banach-avaruus, $f : X \to F$ Lipschitz-jatkuva ja $f(e) = 0$. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen $\widetilde{f} \in \mathcal{L}(AE(X), F)$, jolle $f = \widetilde{f} \circ \iota$. Lisäksi $\|\widetilde{f}\| = L(f)$.

(b) Olkoon $i : X \to E$ on isometria Banach-avaruuteen E siten, että $i(e) = 0$. Oletetaan, että jokaisella Banach-avaruudella F ja jokaisella Lipschitz-jatkuvalla $f : X \to F$, jolle $f(e) = 0$, on olemassa yksikäsitteinen $\widehat{f} \in \mathcal{L}(E, F)$, jolle $f = \widehat{f} \circ i$ ja $\|\widehat{f}\| = L(f)$. Osoita, että E ja $AE(X)$ ovat isometrisesti isomorfisia.

Todistus.

(a) Olkoon M metrisen avaruuden X molekyylien vektoriavaruus. Asettamalla

$$\tilde{f}(m) := \sum_{j=1}^{n} a_j \, (f(x_j) - f(y_j)),$$

kun $m = \sum_{j=1}^{n} a_j \, m_{x_j y_j} \in M$, saadaan hyvinmääritelty lineaarikuvaus $\tilde{f} : M \to F$ (minkä lukija osoittaa). Olkoon $A : M \to F$ lineaarikuvaus; on selvää, että $f = A \circ \iota$ jos ja vain jos $A = \tilde{f}$. Lisäksi saadaan $L(f) = L(\tilde{f} \circ \iota) \leq L(\tilde{f}) \; L(\iota) = \|\tilde{f}\|$. Kääntäen,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}(m)\|_F &= \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \, (f(x_j) - f(y_j)) \right\|_F \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \|f(x_j) - f(y_j)\|_F \\
&\leq L(f) \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, d(x_j, y_j),
\end{aligned}$$

mistä seuraa $\|\tilde{f}(m)\|_F \leq L(f) \; \|m\|_{AE}$ eli $\|\tilde{f}\| \leq L(f)$. On siis todistettu, että $\|\tilde{f}\| = L(f)$. Lineaarikuvaus $\tilde{f} : M \to F$ voidaan jatkaa yksikäsitteisesti lineaarikuvaukseksi $\widetilde{f} : AE(X) \to F$, jolle $\|\widetilde{f}\| = \|\tilde{f}\| = L(f)$.

(b) (Piirrä oheen kommutoiva kaavio avaruuksista X ja $AE(X), E$ ja niiden välisistä kuvauksista!) Isometriat $\iota : X \to AE(X)$ ja $i : X \to E$ synnyttävät yksikäsitteiset lineaarikuvaukset

$$\begin{aligned}
\widehat{\iota} : E \to AE(X), &\quad \|\widehat{\iota}\| = L(\iota) = 1, \quad \iota = \widehat{\iota} \circ i, \\
\widetilde{i} : AE(X) \to E, &\quad \|\widetilde{i}\| = L(i) = 1, \quad i = \widetilde{i} \circ \iota, \\
\widetilde{\iota} : AE(X) \to AE(X), &\quad \|\widetilde{\iota}\| = L(\iota) = 1, \quad \iota = \widetilde{\iota} \circ \iota, \\
\widehat{i} : E \to E, &\quad \|\widehat{i}\| = L(i) = 1, \quad i = \widehat{i} \circ i.
\end{aligned}$$

On selvää, että saatiin kuvaukset $\widetilde{\iota} = I_{AE(X)} = (v \mapsto v)$ ja $\widehat{i} = I_E = (w \mapsto w)$. Koska

$$\widehat{\iota} \circ \widetilde{i} \circ \iota = \iota \quad \text{ja} \quad \widetilde{i} \circ \widehat{\iota} \circ i = i,$$

on oltava

$$\widehat{\iota} \circ \widetilde{i} = \widetilde{\iota} = I_{AE(X)} \quad \text{ja} \quad \widetilde{i} \circ \widehat{\iota} = \widehat{i} = I_E,$$

joten $\widehat{\iota}$ ja $\widetilde{i}$ ovat toistensa käänteiskuvauksia. Normiavaruuksien välinen bijektio A, jolle pätee $\|A\| \leq 1$ ja $\|A\|^{-1} \leq 1$ on väistämättä isometria:

$$\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\| \; \|Ax\| = \|Ax\| \leq \|A\| \; \|x\| \leq \|x\|.$$

Täten $\widehat{\iota}$ ja $\widetilde{i}$ ovat isometrisia Banach-avaruusisomorfismeja $\square$

5. Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathrm{Lip}_0(X)$ involutiivinen ja heikko*-suljettu (ykkösetön) alialgebra. Olkoon $(X_\mathcal{A}, d_\mathcal{A})$ luennoilla määritelty metrinen avaruus. Osoita, että $L_\pi : \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A}) \to \mathrm{Lip}_0(X)$ voidaan rajoittaa isometriseksi isomorfismiksi $\mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A}) \to L_\pi(\mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A})) = \mathcal{A}$.

Muistutuksia: Tekijäavaruuden $X_\mathcal{A} = \{[x] : \ x \in X\}$ pisteet ovat avaruuden X osajoukkoja $[x] = \{y \in X \mid \forall f \in \mathcal{A} : \ f(x) = f(y)\}$. On helppo tarkistaa, että $d_{X_\mathcal{A}}$ on joukon $X_\mathcal{A}$ metriikka, kun

$$d_{X_\mathcal{A}}([x],[y]) = \sup_{f \in \mathcal{A}: L(f) \leq 1} |f(x) - f(y)|.$$

Tekijäkuvaus $\pi = (x \mapsto [x]) : X \to X_\mathcal{A}$ indusoi algebrahomomorfismin

$$L_\pi : \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A}) \to \mathrm{Lip}_0(X), \quad \widetilde{f} \mapsto \widetilde{f} \circ \pi,$$

jolle $\|L_\pi\| = L(\pi)$.

Todistus. Koska

$$d_{X_\mathcal{A}}([x],[y]) = \sup_{f \in \mathcal{A}: L(f) \leq 1} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{f \in \mathcal{A}: L(f) \leq 1} L(f)\ d(x,y) = d(x,y),$$

saadaan $L(\pi) \leq 1$. Ota $g \in \mathcal{A}$. Määritellään $\widetilde{g} : X_\mathcal{A} \to \mathbb{K}$ siten, että $\widetilde{g}([x]) = g(x)$. Tällöin

$$|\widetilde{g}([x]) - \widetilde{g}([y])| = |g(x) - g(y)| \leq L(g) \sup_{f \in \mathcal{A}: L(f) \leq 1} |f(x) - f(y)| = L(g)\ d_{X_\mathcal{A}}([x],[y]),$$

joten $\widetilde{g} \in \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A})$, tarkemmin sanoen $L(\widetilde{g}) \leq L(g)$. Voidaan siis määritellä kuvaus $T = (g \mapsto \widetilde{g}) : \mathcal{A} \to \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A})$. Nyt $L_\pi(Tg) = L_\pi(\widetilde{g}) = g$. Toisaalta

$$|g(x) - g(y)| = |\widetilde{g}([x]) - \widetilde{g}([y])| \leq L(\widetilde{g})\ d_{X_\mathcal{A}}([x],[y]) \leq L(\widetilde{g})\ d(x,y),$$

joten on oltava $L(g) \leq L(\widetilde{g})$; on siis todistettu, että $L(g) = L(\widetilde{g})$. Näin ollen kuvaus $T = (g \mapsto \widetilde{g}) : \mathcal{A} \to \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A})$ on isometrinen algebrahomomorfismi. Halutaan osoittaa, että T on surjektio.

Kuvaus π on jatkuva ja avaruus X kompakti, joten $\pi(X) = X_\mathcal{A}$ on kompakti. Koska $\mathcal{A}$ on involutiivinen alialgebra ja koska T on $*$-algebrahomomorfismi, on $T(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A})$ involutiivinen alialgebra. Ota verkko $(\widetilde{g}_j)_{j \in J} \subset T(\mathcal{A})$, joka heikko*-suppenee pisteeseen $\widetilde{g} \in \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A})$; tällöin

$$g_j(x) = \widetilde{g}_j([x]) \to_{j \in J} \widetilde{g}([x]) = g(x)$$

jokaisella $x \in X$. Koska $(g_j)_{j \in J} \subset \mathcal{A}$ on rajoitettu verkko (sillä T on isometria) ja $\mathcal{A}$ on heikko*-suljettu, saadaan $g \in \mathcal{A}$; siten $\widetilde{g} \in T(\mathcal{A})$, $T(\mathcal{A})$ on heikko*-suljettu. Ota seuraavaksi $[x],[y] \in X_\mathcal{A}$. Ota $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $f_\varepsilon \in \mathcal{A}$, jolle $L(f_\varepsilon) = 1$ ja $d_{X_\mathcal{A}}([x],[y]) < |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| + \varepsilon$, joten

$$|\widetilde{f}_\varepsilon([x]) - \widetilde{f}_\varepsilon([y])| \leq d_{X_\mathcal{A}}([x],[y]) < |\widetilde{f}_\varepsilon([x]) - \widetilde{f}_\varepsilon([y])| + \varepsilon;$$

nähdään, että $T(\mathcal{A})$ separoi avaruuden $X_\mathcal{A}$ pisteet tasaisesti. Täten $T(\mathcal{A})$ on algebran $\mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A})$ heikko*-suljettu involutiivinen alialgebra, joka separoi kompaktin avaruuden $X_\mathcal{A}$ pisteet tasaisesti; Stone–Weierstrass -lauseen Lipschitz-analogian mukaan on oltava $T(\mathcal{A}) = \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A})$. Niinpä

$$T = (g \mapsto \widetilde{g}) : \mathcal{A} \to \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{A})$$

on isometrinen $*$-algebraisomorfismi $\square$

6. Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Olkoon $\mathcal{J} \subset \mathrm{Lip}_0(X)$ heikko*-suljettu ideaali. Osoita, että $\mathcal{J} = \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$.

Todistus. Edellisen tehtävän merkinnöin $[x] := \{y \in X \mid \forall g \in \mathcal{J} : \ g(x) = g(y)\}$. Tällöin $[e] = V(\mathcal{J})$ ja $[x] = \{x\}$, kun $x \notin [e]$ (kuten lukija helposti osoittaa). Triviaalisti $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}([e])$. Ota $f \in \mathcal{I}([e])$. Lisätehtävässä osoitetaan, että heikko*-suljettu ideaali on aina involutiivinen, joten $\mathcal{J}$ on involutiivinen heikko*-suljettu alialgebra, ja edellisen tehtävän nojalla

$$f \in \mathcal{J} \ \Leftrightarrow \ \widetilde{f} \in \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{J}),$$

missä $\widetilde{f}([x]) := f(x)$. Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin funktiosta f riippuvalla vakiolla $C < \infty$ pätee

$$\forall x, y \in X : \ |\widetilde{f}([x]) - \widetilde{f}([y])| \leq C \ d_{X_\mathcal{J}}([x], [y]),$$

niin saamme tuloksen $f \in \mathcal{J}$, ja edelleen $\mathcal{I}([e]) \subset \mathcal{J}$.

Todistetaan aputulos

$$\forall x \in X : \ d_{X_\mathcal{J}}([x], [e]) = d(x, [e]). \tag{1}$$

Tiedämme, että $d_{X_\mathcal{J}}([x], [y]) \leq d(x, y)$ jokaisella $x, y \in X$, joten $d_{X_\mathcal{J}}([x], [e]) \leq d(x, [e])$. **Oletetaan**, että

$$0 < \delta < d(x, [e]) - d_{X_\mathcal{J}}([x], [e]).$$

Kun $\varepsilon > 0$, määritellään "ykkösen approksimaatio" $i_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$,

$$i_\varepsilon(z) := \min(1, d_{X_\mathcal{J}}([z], [e])/\varepsilon);$$

edellisen tehtävän nojalla $i_\varepsilon \in \mathcal{J}$, sillä $\widetilde{i_\varepsilon} \in \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{J})$. Määritellään myös joukko

$$V_\varepsilon := \{z \in X \mid d_{X_\mathcal{J}}([z], [e]) < \varepsilon\},$$

joka selvästi sisältää joukon $[e]$. Määritellään $g_\delta(z) := \max(0, d(x, [e]) - d(x, z) - \delta)$. **Oletetaan**, että

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in V_\varepsilon : \ g_\delta(x_\varepsilon) \neq 0.$$

Tällöin siis $d(x, x_\varepsilon) < d(x, [e]) - \delta$. Koska X on kompakti metrinen avaruus, on jonolla $(y_n = x_{1/n})_{n=1}^\infty \subset X$ suppeneva osajono $(y_{n_j})_{j=1}^\infty$ (X on *jonokompakti*!); merkitään $y = \lim_{j\to\infty} y_{n_j}$, jolloin $[y] = \lim_{j\to\infty}[y_{n_j}]$. Tällöin $d(x, y_{n_j}) < d(x, [e]) - \delta$ jokaisella j, joten

$$d(x, y) \leq d(x, [e]) - \delta, \quad \text{mutta} \quad d_{X_\mathcal{J}}([y_{n_j}], [e]) \overset{y_{n_j} \in V_{1/n_j}}{<} 1/n_j \to_{j\to\infty} 0;$$

siten $d_{X_\mathcal{J}}([y], [e]) = 0$ eli $[y] = [e]$. Tällöin

$$d(x, [e]) \overset{y \in [e]}{\leq} d(x, y) \leq d(x, [e]) - \delta \overset{\delta > 0}{<} d(x, [e]),$$

mikä on **ristiriita**. Täten on olemassa $\varepsilon > 0$, jolle $g_\delta|_{V_\varepsilon} \equiv 0$. Tällöin $g_\delta = g_\delta \ i_\varepsilon \in \mathcal{J}$, ja koska $L(g_\delta) = 1$, saadaan

$$\begin{aligned} d_{X_\mathcal{J}}([x], [e]) \ &= \ \sup_{g \in \mathcal{J} : L(g) \leq 1} |g(x) - g(e)| \\ &\geq \ |g_\delta(x) - g_\delta(e)| \ = \ |g_\delta(x)| \ = \ d(x, [e]) - \delta, \end{aligned}$$

mistä saadaan $\delta \geq d(x, [e]) - d_{X_\mathcal{J}}([x], [e])$; tämä on taas **ristiriita**. Täten kaava (1) pätee.

Jos $x, y \in [e]$, niin toki $|\widetilde{f}([x]) - \widetilde{f}([y])| = 0$. Jos $x \notin [e]$ ja $y \in [e]$, niin

$$|\widetilde{f}([x]) - \widetilde{f}([y])| = |f(x)| \leq L(f)\ d(x,[e]) \overset{(1)}{=} L(f)\ d_{X_\mathcal{J}}([x],[y]).$$

Oletetaan sitten, että $x, y \notin [e]$. Voidaan olettaa, että

$$0 < \varepsilon < d(y,[e]) \leq d(x,[e])$$

(huomaa, että $[e] \subset X$ on suljettu, joten $0 < d(y,[e])$). Merkitään $A_\varepsilon := V_\varepsilon \cup \{x,y\}$. Määritellään $g_\varepsilon : A_\varepsilon \to \mathbb{R}$ siten, että

$$g_\varepsilon(A_\varepsilon \setminus \{x\}) = \{0\}, \quad g_\varepsilon(x) = \min(d(x,y), d(x,V_\varepsilon)).$$

Nyt $L(g_\varepsilon) = 1$, joten Tietzen jatkolauseen Lipschitz-analogian mukaan on olemassa $G_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_0(X,\mathbb{R})$, jolle

$$G_\varepsilon|_{A_\varepsilon} = g_\varepsilon, \quad L(G_\varepsilon) = 1.$$

Edelleen, $G_\varepsilon = G_\varepsilon\ i_\varepsilon \in \mathcal{J}$. Saadaan

$$\begin{aligned} d_{X_\mathcal{J}}([x],[y]) &= \sup_{g \in \mathcal{J}: L(g) \leq 1} |g(x) - g(y)| \\ &\geq |G_\varepsilon(x) - G_\varepsilon(y)| = \min(d(x,y), d(x,V_\varepsilon)) \\ &\overset{(1)}{\geq} \min(d(x,y), d(x,[e]) - \varepsilon) \\ &\to_{\varepsilon \to 0^+} \min(d(x,y), d(x,[e])). \end{aligned}$$

On siis todistettu, että jos $x, y \notin [e]$, niin

$$d_{X_\mathcal{J}}([x],[y]) \geq \min(d(x,y), \max(d(x,[e]), d(y,[e]))),$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned} |\widetilde{f}([x]) - \widetilde{f}([y])| &= |f(x) - f(y)| \\ &\leq \min(L(f)\ d(x,y), |f(x)| + |f(y)|) \\ &\leq \min(L(f)\ d(x,y), L(f)\ (d(x,[e]) + d(y,[e]))) \\ &\leq L(f)\ \min(d(x,y), 2\max(d(x,[e]), d(y,[e]))) \\ &\leq 2\ L(f)\ d_{X_\mathcal{J}}([x],[y]) \end{aligned}$$

jokaisella $x, y \notin [e]$. Täten olemme todistaneet, että $\widetilde{f} \in \mathrm{Lip}_0(X_\mathcal{J})$ eli $f \in \mathcal{J}$ $\square$

Huomautus. Edellisessä todistuksessa saatiin tulos $L(\widetilde{f}) \leq 2\ L(f)$, kun $f \in \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$. Koska nyt tiedämme, että $\mathcal{I}(V(\mathcal{J})) = \mathcal{J}$, seuraa tehtävän 5 nojalla jopa $L(\widetilde{f}) = L(f)$.

Lisätehtävä. Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Oletetaan, että $\mathcal{J} \subset \mathrm{Lip}_0(X)$ on heikko*-suljettu ideaali. Todista, että $\mathcal{J}$ on involutiivinen.

Todistus. Ota $f \in \mathcal{J}$. Merkitään $a := \|f\|_{C(X)}$. Määritellään

$$\mathcal{A} := \{g \in \mathrm{Lip}_0([-a^2, a^2], \mathbb{R}) : \ g \circ |f|^2 \in \mathcal{J}\}.$$

Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $g, h \in \mathcal{A}$, niin

$$\begin{aligned} (\lambda g) \circ |f|^2 &= \lambda (g \circ |f|^2) \in \mathcal{J}, \\ (g+h) \circ |f|^2 &= g \circ |f|^2 + h \circ |f|^2 \in \mathcal{J}, \\ (g\ h) \circ |f|^2 &= (g \circ |f|^2)\ (h \circ |f|^2) \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

joten $\mathcal{A}$ on ykkösettömän $\mathbb{R}$-algebran $\mathrm{Lip}_0([-a^2, a^2])$ alialgebra. $\mathbb{R}$-algebrat ovat triviaalisti involutiivisia.

Jos $(g_j)_{j \in J} \subset \mathcal{A}$ heikko*-suppenee funktioon $g \in \mathrm{Lip}_0([-a^2, a^2])$, niin $g_j \to_{j \in J} g$ pisteittäin, joten $g_j \circ |f|^2 \to_{j \in J} g \circ |f|^2$ pisteittäin; koska $(g_j \circ |f|^2)_{j \in J} \subset \mathcal{J}$ on rajoitettu verkko, saadaan heikko*-suppeneminen $g_j \circ |f|^2 \to_{j \in J} g \circ |f|^2 \in \mathrm{Lip}_0(X)$; koska $\mathcal{J}$ on heikko*-suljettu, pätee $g \circ |f|^2 \in \mathcal{J}$. Täten $g \in \mathcal{A}$ eli $\mathcal{A}$ on heikko*-suljettu.

Lisäksi $\mathcal{A}$ separoi avaruuden $[-a^2, a^2]$ pisteet tasaisesti, sillä $(t \mapsto t) \in \mathcal{A}$ (huomaa, että $|f|^2 = \overline{f}\ f \in \mathcal{J}$).

Stone–Weierstrass -lauseen Lipschitz-analogian mukaan $\mathcal{A} = \mathrm{Lip}_0([-a^2, a^2], \mathbb{R})$. Erityisesti $(t \mapsto 1 - e^{-nt}) \in \mathcal{A}$, toisin sanoen $(x \mapsto 1 - \exp(-n|f(x)|^2)) \in \mathcal{J}$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}^+$. Siksipä $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{J}$, missä

$$f_n := \overline{f}\ (1 - \exp(-n|f|^2)).$$

Tällöin $f_n(x) \to \overline{f(x)}$ jokaisella $x \in X$. Osoitetaan, että $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{J}$ on rajoitettu jono. Kuvaukselle $h_n = (z \mapsto \overline{z} e^{-n|z|^2}) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pätee $h_n(z) = h_1(\sqrt{n} z)/\sqrt{n}$, joten

$$L(h_n) = L(h_1) \ = \ L(z \mapsto \overline{z} e^{-|z|^2}) = L(z \mapsto z e^{-|z|^2}) = 1$$

($z \mapsto z e^{-|z|^2}$ on kontraktiokuvaus, joka on "melkein identiteetti" origon lähellä). Tästä saadaan

$$L(f_n) = L(\overline{f} - h_n \circ f) \le L(\overline{f}) + L(h_n \circ f) \le L(\overline{f}) + L(h_n)\ L(f) = 2\ L(f).$$

Niinpä $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{J}$ on rajoitettu jono, jolle $f_n \to \overline{f}$ pisteittäin; toisin sanoen $f_n \to \overline{f}$ heikko*-topologiassa. Koska $\mathcal{J}$ on heikko*-suljettu, saadaan $\overline{f} \in \mathcal{J}$; $\mathcal{J}$ on involutiivinen $\square$