Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 3, viikko 6

1. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra. Alkio $x \in \mathcal{A}$ on *topologinen nollantekijä*, jos on olemassa jono $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ niin, että $\|y_n\| = 1$ jokaisella n ja

$$\lim_{n\to\infty} xy_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n x.$$

(a) Jos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset G(\mathcal{A})$ ja $x_n \to x \in \partial G(\mathcal{A})$, niin $\|x_n^{-1}\| \to \infty$.

(b) Osoita, että joukon $\partial G(\mathcal{A})$ alkiot ovat topologisia nollantekijöitä.

(c) Minkälaisissa Banach-algebroissa 0 on ainoa topologinen nollantekijä?

Todistus.

(a) Olkoon $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset G(\mathcal{A})$ pisteeseen $x \in \partial G(\mathcal{A})$ suppeneva jono. **Oletetaan**, että $\|x_n^{-1}\| \not\to \infty$. Tällöin on olemassa $C < \infty$ siten, että $\|x_n^{-1}\| \leq C$ äärettömän monella $n \in \mathbb{N}$. Kiinnitä $n \in \mathbb{N}$ niin, että

$$\|x_n^{-1}\| \leq C \quad \text{ja} \quad \|x_n - x\| < C^{-1}.$$

Nyt

$$\|\mathbb{I} - x_n^{-1}x\| = \|x_n^{-1}(x_n - x)\| \leq \|x_n^{-1}\| \, \|x_n - x\| < 1,$$

joten $x_n^{-1}x = \mathbb{I} - (\mathbb{I} - x_n^{-1}x) \in G(\mathcal{A})$. Niinpä

$$x = x_n(x_n^{-1}x) \in G(\mathcal{A}),$$

joten $x \in G(\mathcal{A}) \cap \partial G(\mathcal{A})$. Muistetaan kuitenkin, että $G(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ on avoin, joten $G(\mathcal{A}) \cap \partial G(\mathcal{A}) = \emptyset$; mutta $x \in \emptyset$ on **ristiriita**.

(b) Ota pisteeseen $x \in \partial G(\mathcal{A})$ suppeneva jono $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset G(\mathcal{A})$. Asetetaan $y_n := x_n^{-1}/\|x_n^{-1}\|$, jolloin

$$\begin{aligned}
\|xy_n\| &= \left\| x \frac{x_n^{-1}}{\|x_n^{-1}\|} \right\| = \left\| (x - x_n + x_n) \frac{x_n^{-1}}{\|x_n^{-1}\|} \right\| \\
&\leq \|x - x_n\| \left\| \frac{x_n^{-1}}{\|x_n^{-1}\|} \right\| + \left\| \frac{x_n x_n^{-1}}{\|x_n^{-1}\|} \right\| = \|x - x_n\| + \frac{1}{\|x_n^{-1}\|} \\
&\overset{\text{(a)}}{\to}_{n\to\infty} 0;
\end{aligned}$$

vastaavasti $y_n x \to_{n\to\infty} 0$.

(c) Tämä voidaan todistaa aivan Gelfand–Mazur -lauseen tapaan: Olkoon $x \in \mathcal{A}$. Oletetaan, että 0 on Banach-algebran $\mathcal{A}$ ainoa topologinen nollantekijä. Gelfandin lauseen mukaan $\sigma(x) \subset \mathbb{C}$ on kompakti ja epätyhjä, joten $\partial\sigma(x) \subset \sigma(x)$ on epätyhjä. Ota $\lambda(x) \in \partial\sigma(x)$. Nyt

$$\lambda(x)\mathbb{I} - x \in \partial G(\mathcal{A}) = \{0\}$$

eli $x = \lambda(x)\mathbb{I}$; kuvaus $\lambda = (x \mapsto \lambda(x)) : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ on selvästi algebraisomorfismi, ja se on isometria: $\|x\| = \|\lambda(x)\mathbb{I}\| = |\lambda(x)|$ □

Esitetään tässä vielä Gelfand–Mazur -lauseeseen perustuva toinen todistus (c)-kohdalle: Ota $x \in \mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A})$ ja määrittele $x_t := (1-t)x + t\mathbb{I}$. Koska $x_0 = x$ on ei-kääntyvä ja $x_1 = \mathbb{I}$ on kääntyvä, on olemassa $t_0 \in [0,1[$, jolle $x_{t_0} \in \partial G(\mathcal{A})$. (b)-kohdan mukaan x_{t_0} on topologinen nollantekijä, joten jos Banach-algebran $\mathcal{A}$ ainoa topologinen nollantekijä on 0, niin on oltava $x_{t_0} = 0$; tällöin saadaan

$$x = \frac{t_0}{1-t_0}\mathbb{I},$$

joten on oltava $x = 0$, sillä x on ei-kääntyvä; täten Gelfand–Mazur -lauseen nojalla $\mathcal{A}$ on isometrisesti isomorfinen Banach-algebran $\mathbb{C}$ kanssa $\square$

2. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra. Osoita, että jos

$$\exists C < \infty \ \forall x, y \in \mathcal{A}: \ \|x\| \, \|y\| \leq C \, \|xy\|,$$

niin $\mathcal{A}$ ja $\mathbb{C}$ ovat isometrisesti isomorfisia Banach-algebroja.

Todistus. Olkoon $x \in \mathcal{A}$ topologinen nollantekijä, ja olkoon $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ jono, jolla $\|y_n\| = 1$ jokaisella n, ja $xy_n, y_nx \to 0$. Tällöin

$$\|x\| = \|x\| \, \|y_n\| \leq C \, \|xy_n\| \to_{n\to\infty} 0,$$

joten $x = 0$. Edellisen tehtävän (c)-kohdan tarkastelun nojalla $\mathcal{A}$ ja $\mathbb{C}$ ovat isometrisesti isomorfisia $\square$

3. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra ja $x, y \in \mathcal{A}$. Todista:

(a) $\rho(xy) = \rho(yx)$.

(b) Jos $xy = yx$, niin $\rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y)$.

(c) Jos x on nilpotentti (eli $x^k = 0$ jollakin $k \in \mathbb{N}$), niin $\sigma(x) = \{0\}$.

Todistus.

(a) Aiemmasta harjoitustehtävästä tiedämme, että (yleisemmässäkin) algebrassa pätee

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\},$$

joten selvästi $\rho(xy) = \rho(yx)$. Esitetään sitten toinen, (epätriviaaliin!) spektraalisädekaavaan nojautuva perustelu: Jos $x = 0$ tai $y = 0$, pätee triviaalisti $\rho(xy) = 0 = \rho(yx)$. Muutoin

$$\begin{aligned}
\rho(xy) &= \lim_{n\to\infty} \|(xy)^n\|^{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x(yx)^{n-1}y\|^{1/n} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left(\|x\|^{1/n} \left(\|(yx)^{n-1}\|^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \|y\|^{1/n} \right) \\
&= \rho(yx),
\end{aligned}$$

sillä $\|x\|^{1/n} \to 1$, $\|y\|^{1/n} \to 1$, $\|(yx)^{n-1}\|^{1/(n-1)} \to \rho(yx)$. Symmetrisesti todistetaan $\rho(yx) \leq \rho(xy)$, joten $\rho(xy) = \rho(yx)$.

(b) Oletetaan, että $xy = yx$. Nyt

$$\begin{aligned}
\rho(xy) &= \lim_{n\to\infty} \|(xy)^n\|^{1/n} \\
&\overset{xy=yx}{=} \lim_{n\to\infty} \|x^n y^n\|^{1/n} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \, \|y^n\|^{1/n} \\
&= \rho(x)\rho(y).
\end{aligned}$$

(c) Jos x on nilpotentti, niin $x^n = 0$ "suurilla" $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq k)$, joten

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0;$$

Gelfandin mukaan $\sigma(x) \neq \emptyset$, joten on oltava $\sigma(x) = \{0\}$ $\square$

4. Olkoon $\mathcal{A}$ algebra. Osajoukon $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ *kommutantti* on

$$\Gamma(\mathcal{S}) := \{x \in \mathcal{A} \mid \forall y \in \mathcal{S}: \ xy = yx\}.$$

Todista:

(a) $\Gamma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$ on alialgebra; jos $\mathcal{A}$ on topologinen algebra, niin $\Gamma(\mathcal{S})$ on suljettu.

(b) $\mathcal{S} \subset \Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))$.

(c) Jos $xy = yx$ kaikilla $x, y \in \mathcal{S}$, niin $\Gamma(\Gamma(\mathcal{S})) \subset \mathcal{A}$ on kommutatiivinen alialgebra, jossa $\sigma_{\Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))}(z) = \sigma_{\mathcal{A}}(z)$ jokaisella $z \in \Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))$.

Todistus.

(a) Ota $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $a, b \in \Gamma(\mathcal{S})$. Olkoon $s \in \mathcal{S}$. Tällöin

$$\begin{aligned} (\lambda a)s &= \lambda(as) = \lambda(sa) = s(\lambda a), \\ (a+b)s &= as + bs = sa + sb = s(a+b), \\ (ab)s &= asb = s(ab), \\ \mathbb{I}_{\mathcal{A}} s &= s = s\mathbb{I}_{\mathcal{A}}, \end{aligned}$$

joten $\Gamma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$ on alialgebra.

Olkoon $\mathcal{A}$ topologinen algebra. Kun $y \in \mathcal{S}$, määritellään *kommutaattorikuvaus*

$$C_y : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto xy - yx.$$

Kommutaattorikuvaus C_y on jatkuva, sillä se on yhdiste jatkuvista algebralaskutoimituksista. Selvästi nähdään, että

$$\Gamma(\mathcal{S}) = \bigcap_{y \in \mathcal{S}} C_y^{-1}(\{0\}).$$

Niinpä $\Gamma(\mathcal{S})$ on suljettu, sillä se saadaan suljettujen joukkojen $C_y^{-1}(\{0\}) \subset \mathcal{A}$ leikkauksena!

(b) Jos $y \in \mathcal{S}$, niin triviaalisti $yx = xy$ jokaisella $x \in \Gamma(\mathcal{S})$, joten $y \in \Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))$.

(c) Oletetaan, että joukon $\mathcal{S}$ alkiot kommutoivat keskenään. Siten

$$\mathcal{S} \subset \Gamma(\mathcal{S}).$$

Jos $M, N \subset \mathcal{A}$ ja $M \subset N$, niin $\Gamma(N) \subset \Gamma(M)$. Niinpä

$$\Gamma(\Gamma(\mathcal{S})) \subset \Gamma(\mathcal{S}).$$

Mutta jos $\Gamma(M) \subset M$, niin joukon $\Gamma(M)$ alkiot kommutoivat keskenään. Täten (a)-kohdan nojalla $\Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))$ on kommutatiivinen alialgebra, kun joukon $\mathcal{S}$ alkiot kommutoivat keskenään.

Oletetaan edelleen, että joukon $\mathcal{S}$ alkiot kommutoivat keskenään. Olkoon $x \in \Gamma(\Gamma(\mathcal{S})) \subset \mathcal{A}$ kääntyvä algebrassa $\mathcal{A}$. Jos voimme osoittaa, että $x^{-1} \in \Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))$, niin todistamme spektriväitteen

$$\forall z \in \Gamma(\Gamma(\mathcal{S})): \ \sigma_{\Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))}(z) = \sigma_{\mathcal{A}}(z).$$

Ota $y \in \Gamma(\mathcal{S})$. Nyt

$$yx^{-1} = x^{-1}xyx^{-1} \overset{xy=yx}{=} x^{-1}yxx^{-1} = x^{-1}y,$$

joten $x^{-1} \in \Gamma(\Gamma(\mathcal{S}))$ $\square$

5. Olkoon X topologinen avaruus. Määritellään $C \subset X \times X$ siten, että

$$(x, y) \in C \iff \forall f \in C(X): f(x) = f(y).$$

Todista:

(a) C on ekvivalenssirelaatio joukossa X.

(b) Joukkojen $C(X)$ ja $C(X/C)$ välillä on luonnollinen bijektiivinen vastaavuus.

(c) X/C on Hausdorff-avaruus.

(d) Jos X on kompakti Hausdorff-avaruus, niin $X \cong X/C$.

Todistus.

(a) Olkoot $x, y, z \in X$. Relaatio C on *refleksiivinen*, koska

$$(\forall f \in C(X): f(x) = f(x)) \Rightarrow (x, x) \in C;$$

C on *symmetrinen*, koska

$$(x, y) \in C \Leftrightarrow (\forall f: f(x) = f(y)) \Leftrightarrow (\forall f: f(y) = f(x)) \Leftrightarrow (y, x) \in C;$$

C on *transitiivinen*, koska

$$\begin{aligned}(x, y) \in C \text{ ja } (y, z) \in C &\Leftrightarrow \forall f, g \in C(X): f(x) = f(y) \text{ ja } g(y) = g(z) \\ &\Rightarrow \forall f \in C(X): f(x) = f(z) \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in C.\end{aligned}$$

(b) Olkoon $[x] := \{y \in X \mid (x, y) \in C\}$ pisteen $x \in X$ ekvivalenssiluokka. Tekijäavaruus $X/C = \{[x] \mid x \in X\}$ varustetaan tekijätopologialla, siis vahvimmalla topologialla, joka tekee kuvauksesta $p = (x \mapsto [x]) : X \to X/C$ jatkuvan. Olkoon $f \in C(X)$. Koska $f(x) = f(y)$ jokaisella $y \in [x]$, voidaan määritellä *ko-indusoitu kuvaus*

$$f^* : X/C \to \mathbb{C}, \quad [x] \mapsto f(x).$$

Toisin sanoen $f = f^* \circ p$. Osoitetaan, että $f^* \in C(X/C)$: olkoon $V \subset \mathbb{C}$ avoin, jolloin $p^{-1}(p(f^{-1}(V))) = f^{-1}(V) \subset X$ on avoin, joten tekijätopologian määritelmän nojalla $(f^*)^{-1}(V) = p(f^{-1}(V)) \subset X/C$ on avoin. Olemme siis saaneet kuvauksen

$$\phi = (f \mapsto f^*) : C(X) \to C(X/C);$$

tämä kuvaus on selvästi injektio. Jos taas $g \in C(X/C)$, niin $g \circ p \in C(X)$ ja $(g \circ p)^* = g$, joten ϕ on myös surjektio.

(c) Oletetaan, että $x, y \in X$, $[x] \neq [y]$. Ota $f \in C(X)$, jolle $f(x) \neq f(y)$. Tällöin $f^* \in C(X/C)$, jolle $f^*([x]) \neq f^*([y])$; topologinen avaruus, jonka pisteet jatkuvat funktiot separoivat, on Hausdorff-avaruus.

(d) Kuvaus $p = (x \to [x]) : X \to X/C$ on aina jatkuva surjektio, olipa X millainen topologinen avaruus tahansa. Jos X on kompakti Hausdorff-avaruus ja $x, y \in X$, $x \neq y$, niin Urysohnin lemman nojalla on olemassa $f \in C(X)$, jolle $f(x) = 0 \neq 1 = f(y)$; siis $[x] \neq [y]$; tällöin $p : X \to X/C$ on myös injektio. Jatkuva bijektio kompaktilta avaruudelta Hausdorff-avaruuteen on aina homeomorfismi $\square$

6. Olkoot $\mathcal{A}_j$ topologisia algebroja jokaisella $j \in J$. Varusta $\mathcal{A} := \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j$ topologisen algebran rakenteella.

Ratkaisu. Olkoon $p_j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_j$ koordinaattiprojektio $(x = (x_j)_{j \in J}) \mapsto x_j$. Määritellään karteesiseen tuloon $\mathcal{A}$ algebrarakenne koordinaateittain:

$$\lambda x := (\lambda x_j)_{j \in J},$$

$$x + y := (x_j + y_j)_{j \in J},$$

$$xy := (x_j y_j)_{j \in J},$$

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A}} := (\mathbb{I}_{\mathcal{A}_j})_{j \in J},$$

kun $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{A}$. On helppo tarkistaa, että näin todellakin saadaan algebra.

Varustetaan $\mathcal{A}$ tulotopologialla. Koska $p_j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_j$ on jatkuva ja $\{0 = 0_{\mathcal{A}_j}\} \subset \mathcal{A}_j$ on suljettu jokaisella $j \in J$, on

$$\{0 = 0_{\mathcal{A}}\} = \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(\{0_{\mathcal{A}_j}\})$$

topologisen algebran $\mathcal{A}$ suljettu osajoukko. Toisaalta tämä olisi voitu todeta siitä, että Hausdorff-ominaisuus säilyy karteesisissa tuloissa.

Entä algebralaskutoimitusten jatkuvuus? Todistetaan vain kertolaskun $((x, y) \mapsto xy) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jatkuvuus, sillä skalaarilla kertomisen ja yhteenlaskun tapaukset ovat hyvin samankaltaiset. Olkoon $W \in \mathcal{V}(xy)$. Tällöin on tulotopologian määritelmän nojalla on olemassa **äärellinen** indeksijoukko $I \subset J$ ja avoimet joukot $W_i \subset \mathcal{A}_i$ jokaisella $i \in I$ niin, että

$$xy \in \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(W_i) \subset W.$$

Jokaisella $i \in I$ otetaan sellaiset $U_i \in \mathcal{V}(x_i)$ ja $V_i \in \mathcal{V}(y_i)$, joilla $U_i V_i \subset W_i$. Määritellään

$$U := \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(U_i), \quad V := \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(V_i).$$

Nyt $U \in \mathcal{V}(x)$ ja $V \in \mathcal{V}(y)$, ja $UV \subset W$. Tulo on siten jatkuva laskutoimitus, ja vastaavasti käsitellään muut laskutoimitukset — $\mathcal{A}$ on topologinen algebra $\square$