Teknillinen Korkeakoulu
Matematiikan laitos

Mat-1.152 Funktionaalianalyysin erikoiskurssi, kevät 2003 Turunen

Laskuharjoitus 6, viikko 9

1. Lipschitz–Urysohn -lemma: Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A,B \subset X$ joukkoja, joille $d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b) > 0$. Osoita, että on olemassa Lipschitz-jatkuva funktio $f : X \to \mathbb{R}$, jolle $0 \le f \le 1$, $f(A) = \{0\}$ ja $f(B) = \{1\}$.

2. (a) Olkoon (X,d) metrinen avaruus, jolle $\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,y\in X} d(x,y) \le 2$. Olkoon $e \notin X$ ja $X^+ = X \cup \{e\}$. Asetetaan $d(x,e) = d(e,x) = 1$ jokaisella $x \in X$. Olkoon $e \in X^+$ avaruuden X^+ kantapiste. Samaista $\operatorname{Lip}(X)$ ja $\operatorname{Lip}_0(X^+)$ isometrisesti.

   (b) Olkoon (X,d) metrinen avaruus kantapisteellä $e \in X$, $\operatorname{diam}(X) < \infty$. Osoita, että kuvaus $i = (f \mapsto f) : \operatorname{Lip}_0(X) \to \operatorname{Lip}(X)$ on jatkuva. Todista, että jos $d(x,e) = 1$ jokaisella $x \in X \setminus \{e\}$, niin i on isometria.

3. Olkoon X metrinen avaruus. Todista seuraavat väittämät:

   (a) $\operatorname{Lip}(X)$ ja $\operatorname{Lip}_0(X)$ ovat Banach-avaruuksia (millä tahansa kantapisteellä).

   (b) Jos $\operatorname{diam}(X) < \infty$, niin $\operatorname{Lip}(X)$ ja $\operatorname{Lip}_0(X)$ ovat topologisia algebroja (tosin jälkimmäinen ykkösetön).

4. Olkoon X metrinen avaruus kantapisteellä $e \in X$, $\iota = (x \mapsto m_{xe}) : X \to \operatorname{AE}(X)$.

   (a) Olkoon F Banach-avaruus, $f : X \to F$ Lipschitz-jatkuva ja $f(e) = 0$. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen $\tilde{f} \in \mathcal{L}(AE(X), F)$, jolle $f = \tilde{f} \circ \iota$. Lisäksi $\|\tilde{f}\| = L(f)$.

   (b) Olkoon $i : X \to E$ on isometria Banach-avaruuteen E siten, että $i(e) = 0$. Oletetaan, että jokaisella Banach-avaruudella F ja jokaisella Lipschitz-jatkuvalla $f : X \to F$, jolle $f(e) = 0$, on olemassa yksikäsitteinen $\hat{f} \in \mathcal{L}(E,F)$, jolle $f = \hat{f} \circ i$ ja $\|\hat{f}\| = L(f)$. Osoita, että E ja $AE(X)$ ovat isometrisesti isomorfisia.

5. (Stone–Weierstrass -lauseen Lipschitz-analogian korollaari.) Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Olkoon $\mathcal{A} \subset \operatorname{Lip}_0(X)$ involutiivinen ja heikko*-suljettu (ykkösetön) alialgebra. Olkoon $(X_{\mathcal{A}}, d_{X_{\mathcal{A}}})$ luennoilla määritelty metrinen avaruus. Osoita, että algebrahomomorfismi $L_\pi : \operatorname{Lip}_0(X_{\mathcal{A}}) \to \operatorname{Lip}_0(X)$ voidaan rajoittaa isometriseksi isomorfismiksi $\operatorname{Lip}_0(X_{\mathcal{A}}) \to L_\pi(\operatorname{Lip}_0(X_{\mathcal{A}})) = \mathcal{A}$.

6. Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Olkoon $\mathcal{J} \subset \operatorname{Lip}_0(X)$ involutiivinen ja heikko*-suljettu ideaali. Osoita, että $\mathcal{J} = \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$.
   (Vinkki: osoita, että $\forall f \in \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))\ \exists C < \infty\ \forall x,y \in X :\ |f(x) - f(y)| \le C\, d_{X_{\mathcal{J}}}([x],[y])$, ja käytä edellisen tehtävän tulosta — on tosin melko luultavaa, että $\mathcal{J} = \mathcal{I}(V(\mathcal{J}))$ voidaan todistaa (helpommin?) suoraan, vetoamatta edelliseen tehtävään; yritä!)

Lisätehtävä. Olkoon X kompakti metrinen avaruus. Oletetaan, että $\mathcal{J} \subset \operatorname{Lip}_0(X)$ on heikko*-suljettu ideaali. Todista, että $\mathcal{J}$ on involutiivinen.