

Mandelbrot joukko

Tämä on Julia-joukkojen "kartasto":

Fixataan alkupisteeksi $z_0 = 0$ ja vaihdellaan parametriä c .

$M := \{c \in \mathbb{C} \mid \text{jono } \{z_n\} = 0, c, c^2+c, \dots \text{ on rajoitettu}\}$
 $\nwarrow$ ns. "kriittinen jono".

Lemma:

Olk. $z \in \mathbb{C}$ s.e. $|z| > \max\{|c|, 2\}$.

Tällöin $z \in E_c$ eli iteraatio $z_0 := z, z_{n+1} = z_n^2 + c, \dots$ hajaantuu.

Tod: $|z| = 2 + \epsilon$ $\nwarrow \epsilon > 0$ ja $|z| \geq c$.

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$$

$$\Rightarrow |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z|$$

$$= |z| \cdot (|z| - 1) \geq (1 + \epsilon) \cdot |z|$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \geq (1 + \epsilon) |z_n| \geq \dots \text{induktio} \dots (1 + \epsilon)^n \cdot |z_0|$$

eli $|z_{n+1}| \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$ $\square$

Seuraus: kriittisen jonon $0, c, c^2+c, \dots$ tiedetään hajaantuvan

jos jokin $|z_k| > \max\{|c|, 2\}$.

(Piirto: mandelbrot. mms)

Lemma: $C \in \mathbb{M} \Rightarrow \bar{C} \in \mathbb{M}$ (kompleksikonjugaatti)

eli $\mathbb{M}$ on symmetrinen Re-akselin suhteen.

Tod. $|\bar{C}| = |C|$ joten $0, \bar{C}, \bar{C}^2 + \bar{C}, \dots$ on rajoitettu $\mathbb{D}$.

Kiintopisteet & stabiilisuus

$$z_{n+1} = f_c(z_n) = z^2 + c$$

$$z = z^2 + c \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2} =: z_{1,1} \text{ ja } z_{1,2}$$

$$f'_c(z_{1,i}) = 1 \pm \sqrt{1-4c}$$

esim. jos $c \in \mathbb{R}$, $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ niin $0 < 1-4c < 4$

ja $|1 - \sqrt{1-4c}| < 1$ eli kiintopiste $z_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}$

on stabiili.

Kysymys: millä c :n arvoilla kiintopiste on

"päättämätön" eli stab./epästab. rajalla?

Vast.: etsitään siis $|f'_c(z_{1,i})| = 1$

$$\begin{cases} z^2 - z + c = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$$

$$2z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \text{ (polaarikoord.)}$$

$$c = z - z^2 = \frac{1}{2} e^{i\theta} - \frac{1}{4} e^{i2\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 2\theta + i \left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right)$$

eli c :n arvot kuvallan param. käyrällä!

(Piirto: $\text{plot}([x(\theta), y(\theta), \theta = 0..2\pi], \dots)$)

$$\begin{cases} x(\theta) = \text{Re}(c) = \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 2\theta \\ y(\theta) = \text{Im}(c) = \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \end{cases}$$

{tämä on
kardioidi:
 $r^2 = \text{vakio}$
 $+ \text{vakio} \cdot \cos(\dots)$

(Maple: combine (... , trig).)

2-jaksolliset pisteet

Nämä toteuttavat $z = f_c^2(z)$

eli $\underbrace{(z^2 + c)^2 + c - z = 0}_{p(z)}$

$p(z)$, polynomi astetta 4

p :n juurina oltava myös kiintopisteet (ts. 1-jaksolliset)

eli p jaollinen $\underbrace{(z - z_{1,1})(z - z_{1,2})}_{= z^2 - z + c}$:lla.

(Maple: factor)

Osoittautuu:

ei kiinnostava

$$p(z) = \underbrace{(z^2 + z + 1 + c)}_{\Rightarrow \text{juuret: } z_{2,1} = \frac{-1 + \sqrt{-3-4c}}{2}} \cdot \underbrace{(z^2 + c - z)}_{\Rightarrow \text{juuret: } z_{2,2} = \frac{-1 - \sqrt{-3-4c}}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{juuret: } z_{2,1} = \frac{-1 + \sqrt{-3-4c}}{2}$$

$$z_{2,2} = \frac{-1 - \sqrt{-3-4c}}{2}$$

Näiden stabiilisuus? Eli $\left| \frac{d}{dz} f_c^2(z_{2,i}) \right| \leq 1$? ($i=1 \text{ tai } 2$)

$$\text{Nyt } \left| \frac{d}{dz} f_c^2 \right|_{z=z_{2,i}} = \underbrace{|4z|}_{-(z+1)} \cdot \underbrace{|z^2+c|}_{-(1+c)} = 4 \cdot |1+c|$$

eli stabiili alue $|1+c| < \frac{1}{4}$,

"päättämätön" alue $|1+c| = \frac{1}{4}$ ympyrä:

keskipiste $c = -1$ $\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \text{ lue: "c:n etäisyys (-1):stä"} \\ \text{säde } \frac{1}{4} \end{array} \right. = \frac{1}{4}$

Vastaavasti n -jaksollisten alueet... (Kalvo)

P.S. Lopuksi jälkimmäinen:

<http://www.cut-the-knot.org/blue/julia.shtml>

The Mandelbrot Set and its Atoms

The buds of the Mandelbrot set correspond to Julia sets that bound basins of attraction of periodic orbits. The numbers in the figure indicate the periods of these orbits.

*Peitgen - Jürgens - Saupe:
Chaos and Fractals*

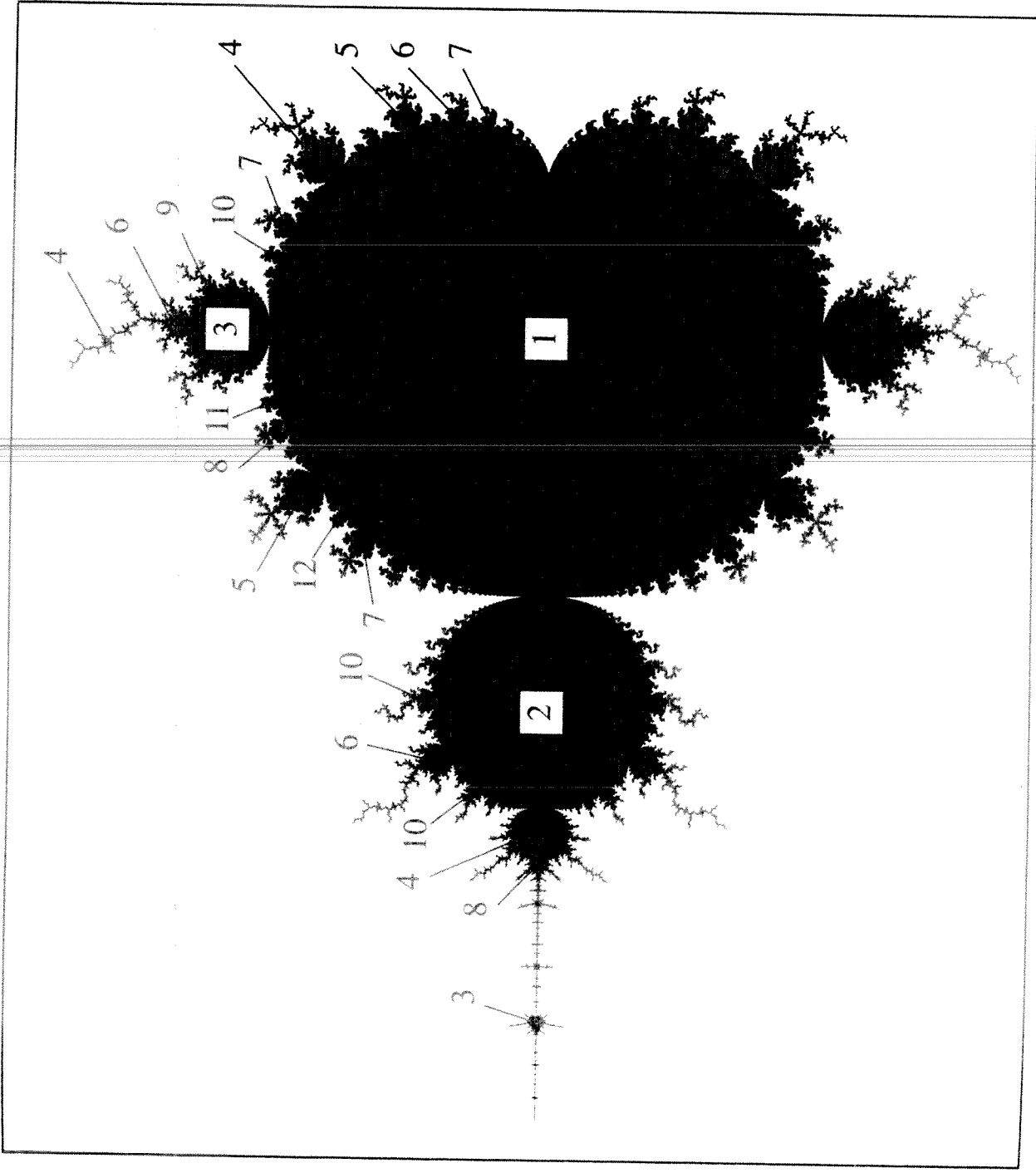


Figure 14.19