

Differenssiyhtälöistä

1.asteen differenssiyhtälö (tai: rekursio
tai palautuskaava) on muotoa

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

x_0 alkuarvo.

2.asteen diff. yhtälö.

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$$

korkeammat asteet vastaavasti.

Ensimmäinen asia: f lineaarinen vai ei?

Lineaariset: o.k.

Epälineaariset? $\ddot{}$

Lause lineaarisen 1.asteen yhtälön

$$x_{n+1} = m x_n + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ratkaisu on

$$x_n = \begin{cases} x_0 + nc & \text{jos } m=1 \\ m^n x_0 + \frac{m^n - 1}{m-1} c & \text{jos } m \neq 1 \end{cases}$$

Tod.

$$x_1 = mx_0 + c$$

$$x_2 = mx_1 + c = m^2x_0 + mc + c$$

$$x_3 = mx_2 + c = m^3x_0 + m^2c + mc + c$$

⋮

$$x_n = m^n x_0 + \underbrace{(m^{n-1} + m^{n-2} + \dots + m + 1)}_{n \text{ kpl}} c$$

$$\text{jos } m=1, x_n = x_0 + nc$$

$$\text{Jos } m \neq 1, \text{ geom. summa} = \frac{m^n - 1}{m - 1}$$

□.

Maple-esim: laina

Lause: 1. asteen lineaarisen differenssiyhtälösystemin

$$\bar{x}_{n+1} = M \bar{x}_n \quad (\bar{x}_n \text{ vektori, } M \text{ vakiomatriisi})$$

$$\text{ratkaisu on } \bar{x}_n = M^n \bar{x}_0 \quad \bar{x}_0 = \text{alkuarvo}$$

Tod kuten edellä... (induktio)

$$\bar{x}_1 = M \bar{x}_0$$

$$\bar{x}_2 = M \cdot \bar{x}_1 = M^2 \bar{x}_0$$

⋮

$$\bar{x}_n = M^n \bar{x}_0$$

□.

Lause lineaarisen 2. asteen yhtälön

$$a x_{n+2} = b x_{n+1} + c x_n \quad \begin{array}{l} x_0, x_1 \text{ alkuearvoja} \\ n=0, 1, 2, \dots \end{array}$$

ratkaisu on
$$\underline{x_n = k_1 \lambda_1^n + k_2 \lambda_2^n}$$

jossa k_1, k_2 vakioita (määntyvät x_0, x_1 :stä)

ja $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ovat yhtälön $a\lambda^2 - b\lambda - c = 0$ juuret.

Jos $\lambda_1 = \lambda_2$ niin $x_n = (k_3 + nk_4) \lambda_1^n$. (k_3, k_4 vakioita)

Tod. etsitään ratkaisuja muotoa $x_n = k \cdot \lambda^n$

sij. $\Rightarrow a k \lambda^{n+2} = b k \lambda^{n+1} + c k \lambda^n$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda^n k}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(a\lambda^2 - b\lambda - c)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ 2 juurta λ_1, λ_2 . Jos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ niin

$$x_n = \text{vakio} \cdot \lambda_1^n \quad \text{ja} \quad x_n = \text{vakio} \cdot \lambda_2^n \quad \text{ovat}$$

riippumattomia ratkaisuja. Yhtälö on lineaarinen

ja astetta 2 $\Rightarrow$ yleinen ratk. on ylläolevien summa.

$$\underline{\text{Eli } x_n = k_1 \lambda_1^n + k_2 \lambda_2^n}$$

Jos taas $\lambda_1 = \lambda_2$, $a\lambda^2 - b\lambda - c = a(\lambda - \lambda_1)^2$ ja

sijoittamalla $x_n = kn\lambda^n$ nähdään olevan ratkaisu

$\Rightarrow$ yleinen ratk.
$$\underline{x_n = (k_3 + nk_4) \lambda_1^n} \quad \square$$

Ominaisarvohajotelma M neliömatriisi $m \times m$ Jos $x \neq 0$, x m -vektori

s.e. $Mx = \lambda x$ (λ skalaari)

niin x on ominaisvektori, (aina: $x \neq 0$!) λ on ominaisarvo (voi olla $\lambda = 0$)Lause: Jos M :llä on m kpl riippumattomia ominaisvektoreita, se on diagonalisoituvaeli' $M = V S V^{-1}$ jossa $S = \text{diag. matr.}$ Lisäksi, V :n sarakkeet omin.vektoreita

S:n alkioit omin. arvoja.

"Tod:" $V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m)$ om. vekt.

$$MV = (Mv_1 \ Mv_2 \ \dots \ Mv_m)$$

$$= (\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \dots \ \lambda_m v_m)$$

$$= (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$= V \cdot S$$

$$\exists V^{-1} \Rightarrow M = V S V^{-1}$$

□.