

Logistinen kuvaus

Populaatiomalli:

esim. linnuilla, hyönteisillä (ym. eläimillä?)

on tuihty lisäntymisaikajaksot $\Rightarrow$ diskreetti

kasvumalli parempi kuin jatkuva (jälkimmäinen

soveltuu bakteereille ja ihmisille joiden lisääntyminen

jatkuvaa pitkin vuotta) joka johtuu differentiaali-
yhtälöstäPopulaatio N_t (lisäntymisesoksen jälkeen)vuonna t . ($N_t \in \mathbb{R}$, o.k. approx.)

Seuraavana vuonna:

$$N_{t+1} = N_t \cdot (r - \underbrace{c N_t}_{\text{kasvukerroin}}) \quad b, c \in \mathbb{R}$$

jos $c=0$, kasvu rajoittamatonjos $c>0$, suuri $N_t \Rightarrow$ vähän ruokaa, enemmän
kuolleisuutta.Olk. $c = 1/N_{\max}$; $N_{\max} = \text{max. populaatio}$.

Yksinkertaisin mahdollinen siinä mielessä, että kasvukerroin

 $r - c N_t$ riippuu N_t :stä yksinkertaisella tavalla (vasteen
polynomi) ja iso $N_{\max} \Rightarrow N_t$:n vaikutus kuolleisuuteen vähämpi.

$$\text{eli } N_{t+1} = N_t \cdot \left(r - \frac{r}{N_{\max}} N_t \right) \quad \text{N}_{\max} = \text{maksimaalinen populaatio}$$

$$\text{olk. } x_n := \frac{N_n}{N_{\max}} = \text{suhteellinen populaatio eli } 0 \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{joten } x_{n+1} &= x_n \cdot (r - r x_n) \\ &= r x_n (1 - x_n) \\ &=: f(x_n) \end{aligned}$$

logistinen yhtälö

Jotta $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, ollaan $0 \leq r \leq 4$

Kiintopisteet? $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 1 - \frac{1}{r}$

Näiden stabiilius? Eli lähestyykö x_n jompakumpaa?

Ensin:

Lause olk. x^* kiintopiste eli $x^* = f(x^*)$.

x^* on stabiili tai puoleensavetävä (eli $x_n \rightarrow x^*$)

jos $\left| \frac{df}{dx}(x^*) \right| < 1$.

x^* on epästabiili jos $\left| \frac{df}{dx}(x^*) \right| > 1$.

Tod. olk. alkupiste x_0 lähellä x^* :ä. Taylor-sarja

$$x_1 = f(x_0) = \underbrace{f(x^*)}_{=x^*} + f'(x^*) \cdot (x_0 - x^*) + O(x_0 - x^*)^2$$

$$\text{Samoin } x_{n+1} = f(x_n) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x_{n-1} - x^*) + O(\dots)$$

$$= x^* + f'(x^*) \cdot f'(x^*) \cdot (x_{n-2} - x^*) + O(\dots)$$

$$= x^* + \underbrace{f'(x^*)^n}_{\text{dominoi kun } n \rightarrow \infty} \cdot (x_0 - x^*)$$

induktio

Jos $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow (f')^n \rightarrow 0$ eli $x_n \rightarrow x^*$

Jos $|f'(x^*)| > 1$ niin $(f')^n \rightarrow \infty$ hajaantuu.

□.

Kiintopisteiden stabiilisuus?

$f'(0) = r$ stabiili kun $0 \leq r < 1$ (testaa arkasarja: $x_n \rightarrow 0$ kun ...)

$f'(1 - \frac{1}{r}) = 2 - r$ stabiili kun $1 < r < 3$ (testaa: $x_n \rightarrow 1 - \frac{1}{r}$)

Kun $r > 3$ molemmat ($x=0$, $x=1 - \frac{1}{r}$) epästabiileja

$\Rightarrow$ mitä tapahtuu?

Osoitetaan: syntyy 2-jakso eli f^2 :in kiintopiste.

f^2 :in kiintopiste epästabiilisuus kun $r > 1 + \sqrt{6}$

$\Rightarrow$ 4-jakso!

Ja, kun r kasvaa, syntyy 8-jakso, 16-jakso, ...

$\Rightarrow$ kaos "period-doubling route to chaos"

$\Rightarrow$ bifurkaatio kaavio!

Osoittautuu vielä: kaos hellittää kun r kasvaa

$\Rightarrow$ 3-jakso (!?) ... taas kaos ... taas jakso ...

lopulta täysin kaotinen "intermittency route to chaos".

Yhteenveto logistisen kuvauksen $f: x \mapsto rx(1-x)$

1- ja 2-jaksollisista pisteistä:

$$0 < r < 1 \Rightarrow x_{1,1} = 0 \text{ stabiili eli } x_n \rightarrow 0$$

$$1 < r < b_1 \Rightarrow x_{1,1} \text{ epästab.}, x_{1,2} = 1 - \frac{1}{r} \text{ stab. eli } x_n \rightarrow 1 - \frac{1}{r}$$

($b_1 = 3$)

$$b_1 < r < b_2 \Rightarrow x_{1,1} \text{ ja } x_{1,2} \text{ epästab.}, x_{2,1} \text{ ja } x_{2,2} \text{ stabiileja}$$

($b_2 = 1 + \sqrt{6}$)

eli $x_n \rightarrow 2$ -jakso

$$b_2 < r < b_3 \Rightarrow x_{2,1} \text{ ja } x_{2,2} \text{ yhtäaikaan epästabiileiksi}$$

($b_3 = ?$)

$\Rightarrow x_n \rightarrow 4$ -jakso (!)