Stabiilisuus

23.3.04

$y' = f(t, y)$.

Muistetaan: yhtälö on stabiili, kun $f_y < 0$.

yksinkertaisin lähestymistapa:
Tarkastellaan yhtälöä $y' = ay$.
Ratk. $y(t) = y_0 e^{at}$.

Euler: $y_{n+1} = y_n + hay_n = y_n(1+ha)$

$\Rightarrow \quad y_n = (1+ha)^n y_0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = a < 0$, jotta yhtälö stabiili

Eulerin menetelmä on stabiili
(virhe ei kasva $n \to n+1$; (y_n)-jono käyttäytyy, kuten ratkaisu, eli tässä $\to 0$, kun $n \to \infty$),

jos $|1+ha| < 1$

$\Leftrightarrow \quad -1 < 1+ha < 1$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h}} < -\frac{2}{a} = \underline{\underline{-\frac{2}{f_y}}}$

Pätee yleisesti: <u>EM:n stabiilisuusehto</u>

Jos $a > 0$, jolloin siis $\frac{\partial f}{\partial y} = a > 0$, yhtälö on epästabiili (pahanlaatuinen). Tällöin ehto $|1 + ha| < 1$ ei toteudu millään $h > 0$, eli Eulerin menetelmä on epästabiili, vaikittänpä h miten pieneksi tahansa.

<u>Implisiittinen Euler</u>

$$y' = ay$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$
$$= y_n + h a y_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1-ha}$$

Huom! Tarkastelut näyttävät kovasti erikoistapauksilta mutta yleistyvät melko helposti. Sitäpaitsi exp-fkt. on sittenkin varsin edustava tapaus.

Jos $a < 0$, niin $1 - ha > 1$;

$$y_n = \frac{y_0}{(1-ha)^n} \to 0, \text{ kun } n \to \infty,$$

joten $y_n - y(t_n) \to 0$, kun $n \to \infty$.

$$\boxed{\text{Implisiittinen Euler on stabiili } \forall\, h > 0. \quad (\text{Kun yhtälö on stabiili.})}$$

Diff. yhtälösysteemi

Ensin lin., vakiokert:

$\vec{y}' = A\vec{y}$, A neg. def.

$A = -C$, C pos. def.

Euler: $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n - hC\vec{y}_n = \underbrace{(I - hC)}_{B}\vec{y}_n$

$\vec{y}_n = B^n \vec{y}_0$

Tarkka ratk. $\vec{y}(t) = \vec{y}_0 e^{At}$

A diag:va $\Rightarrow$ $A = VDV^{-1}$

$e^{At} = Ve^{Dt}V^{-1} =$

$= V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V^{-1} \to 0$, kun $t \to \infty$,

koska $\lambda_k < 0$,

$k = 1, \ldots, n$.

Jotta Eulerin menet. stabiili, on oltava:

$y_n \to 0$, kun $n \to \infty$, eli $B^n \to 0$.

Jos λ on B:n ominaisarvo (ja $\vec{x}$ vast. om.yksikkövekt.), niin

$Bx = \lambda x$, joten $\|Bx\| = |\lambda|$.

$\|x\| = 1$

Siis $\|B\| = \max_{\|x\|=1} \|Bx\| \geq |\lambda|$

$\forall \lambda \in \sigma(A)$.

Siten välttämätön ehto sille, että

$\|B^n\| \to 0$, on $|\lambda| < 1$.

Olk. λ C:n om. arvo; tällöin

$1 - h\lambda$ on $\underbrace{I - hC}_{B}$:n om. arvo.

Siis (välttämätön) ehto stabiilisuudelle on

$$|1 - h\lambda| < 1 \quad \forall \lambda \in \sigma(C).$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_{max} < \frac{2}{h}, \quad \text{eli} \quad \boxed{h < \frac{2}{\lambda_{max}}}$$

<u>Implisiittinen Euler</u>

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n - hC\vec{y}_{n+1};$$

$$\vec{y}_{n+1} = (I + hC)^{-1}\,\vec{y}_n$$

[Koska C:n om. arvot $\lambda > 0$, niin

$I + hC$:n om. arvot $= 1 + \lambda h > 0$,

joten $\exists (I + hC)^{-1}$]

$(I + hC)^{-1}$:n om. arvot $= (1 + h\lambda)^{-1}$

Stabiilisuusehto $\|(I + hC)^{-1}\| < 1$ merkitsee

siten $\frac{1}{1+\lambda h} < 1$, mikä pätee $\forall h > 0$, koska $\lambda > 0$.