ti 3.2.04

$$\boxed{e^{At}} =$$

$$I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kA^k + \dots$$

Suppenee

Lause

(1) $e^0 = I$

(2) Jos $D = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, niin $e^D = \mathrm{diag}[e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}]$

(3) $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$ (Mahtavaa!)

(4) AA-tehtävän $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ 1-käs. ratk. on $y(t) = e^{At} y_0$.

(5) $e^{A+B} = e^A e^B$, jos $AB = BA$

(6) e^A on aina kääntyvä, ja $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Jos A diagna, niin $e^A = Ve^DV^{-1}$, missä $A = VDV^{-1}$

(Koska $A^2 = VD\underbrace{V^{-1}V}_{I}DV^{-1} = VD^2V^{-1}$

...
)

2 × 2 – lin. vakiokert. luokittelu

Jos A diagon., saadaan

$$e^{At} = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} V^{-1}, \quad V = [v_1 \mid v_2]$$

Toimii myös kompleksisille om.a / om.v.

[Kompl. tap. void. myös laskea:

$$y(t) = c_1 \operatorname{Re}(e^{\lambda t} v) + c_2 \operatorname{Im}(e^{\lambda t} v),$$

missä λ on toinen om. arvo (toinen on $\bar{\lambda}$) ja v vast. om. vekt. (toinen on $\bar{v}$).]

[Tai void. johtaa yleinen reaalinen esitys Eulerin kaavan käyttöön.]

Degeneraatio: λ_1 kaksink. om. arvo, vain yksi om. vekt.

$$e^{At} = e^{\lambda_1 I t} e^{(A-\lambda_1 I)t} \qquad (\lambda_1 I t \text{ ja } (A-\lambda_1 I)t \text{ kommutoivat})$$

$$= e^{\lambda_1 t}\left[I + t(A-\lambda_1 I) + \tfrac{1}{2}t^2(A-\lambda_1 I)^2 + \dots\right]$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^2$$

Cayley – Hamilton $\Rightarrow (A-\lambda_1 I)^2 = 0$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{\lambda_1 t}(I + t(A - \lambda_1 I)).$$

Siis 2 × 2 – tapauksessa kaikki tapaukset on helppo laskea.

Nähdään suht. helposti, että 2×2-systeemi $y' = Ay$ on "similaarinen" systeemin $z' = J_k z$ kanssa, missä

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

J_1 : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reaaliset.

J_2 : kompleksiset om.v./a

J_3 : yksi om.a. 2 LRT om.v.

J_4 : — " — 1 — " — — " —

<u>Maple</u> : with(linalg);
exponential(A,t);

<u>Matlab</u> expm

Helppo kirjoittaa yleinen ratkaisija :

```
function [T,Y] = lindys(A,Tspan,y0)
 if length(Tspan) = 2 , Tspan = linspace(Tspan[1],Tspan[2]),
nT = length(Tspan);   T = Tspan;   end;
[m,m] = size(A);
Y = zeros(m,nT);
for j = 1:nT
   Y(:,j) = expm(A*Tspan(j))*y0;
end;
Y = Y'        % Samaa muotoa kuin odotettu.
```

Yl. om. vekt.

Lause $\underset{2\times 2}{A}$. Olk. λ_1 kaksinkert., vain yksi om. vekt. v_1. Tällöin mieliv. $v_2 \notin sp\{v_1\}$ tot.: $(A-\lambda_1 I)v_2 = c v_1$.

Tod: $(A-\lambda_1 I)v_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$, $\alpha \neq 0$

$$\Rightarrow (A-\lambda_1 I)^2 v_2 = \alpha \underbrace{(A-\lambda_1 I)v_1}_{=0} + \beta \underbrace{(A-\lambda_1 I)v_2}_{w}$$

Merk. $w = (A-\lambda_1 I)v_2 \neq 0$

$$(A-\lambda_1 I)w = \beta w$$

$\Rightarrow Aw = (\lambda_1+\beta)w$. $\lambda_1+\beta$ on A:n om. arvo, joten oltava $\beta = 0$

$$\Rightarrow (A-\lambda_1 I)v_2 = \alpha v_1. \quad \square$$

Val. v_2: $(A-\lambda_1 I)v_2 = v_1$.

$$V = [v_1 \mid v_2]$$

$$AV = [\underbrace{Av_1}_{\lambda_1 v_1} \mid \underbrace{Av_2}_{v_1+\lambda_1 v_2}] = [v_1 \mid v_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$$

$$= V\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = V\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}V^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = V e^{\left[\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{smallmatrix}\right]t} V^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix} = \lambda_1 I + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad e^{\left[\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{smallmatrix}\right]t} = e^{\lambda_1 I t} e^{\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]t}$$

$$= e^{\lambda_1 t}\left[I + t\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + O\right] = e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccc} t_0 & t_1 & \cdots & t_{100} \\ y_1(t_0) & y_1(t_1) & & y_1(t_{100}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n(t_0) & y_n(t_1) & & y_n(t_{100}) \end{array}$$

<u>Tulos</u> : $T = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{100} \end{bmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ y_1(t_1) & & y_n(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1(t_{100}) & & y_n(t_{100}) \end{bmatrix}$

Matlabin ODExx - funktiot palauttavat tuloksen tässä muodossa.

pe 7.11.03

Autonominen systeemi

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

KRP (x_0, y_0):

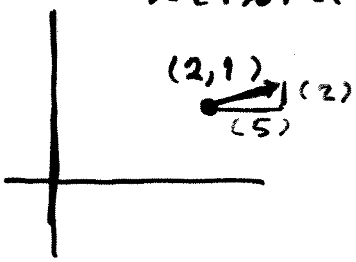
$$\begin{cases} f(x_0,y_0) = 0 \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

Vakiofunktiot $\begin{matrix} x(t) \equiv x_0 \\ y(t) \equiv y_0 \end{matrix}$ ovat ratkaisuja

Suuntakenttä

Esim: $\begin{cases} f(x,y) = x^2+y^2 \\ g(x,y) = xy \end{cases}$

Katsotaan vaikka pist. $(2,1)$

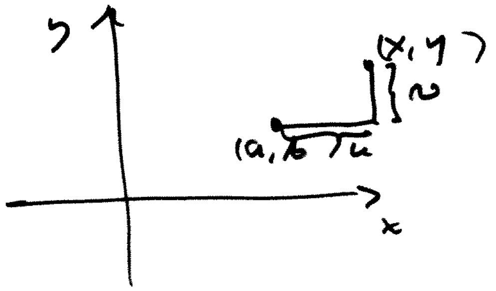


$$x' = f(2,1) = 5$$
$$y' = g(2,1) = 2$$

Vektori $(x', y') = (5, 2)$ ilmaisee trajektorin $(x(t), y(t))$ tangentin suunnan pist. $(2,1)$

Linearisointi

KRP: (a,b)



$$u = x - a$$
$$v = y - b$$

Linearisoitu syst. $\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = J_F(a,b) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$$J_F(a,b) = \begin{bmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \\ g_x(a,b) & g_y(a,b) \end{bmatrix}$$

$$\left(= \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(a,b) \right)$$

Kuvaako jossain KRP:ssä linearisoidun systeemin luonne / stabiilisuuskäytös Alkup. systeemin vastaavaa ko. KRP:ssä.

Säännöt (Lop s. 335)

1. Epästabiilisuus / vahvasti (eli asympt.) stabiilisuus, KYLLÄ

2. Satulat ja spiraalit : KYLLÄ

3. Noodit, joissa $\lambda_1 \neq \lambda_2$ KYLLÄ
(joita KRE sanoo "improper" ja Lop "proper"!)

4. Linearisoidun ~~Noodit~~, joissa $\lambda_1 = \lambda_2$ (Lop: "improper")
voivat epälineaarisessa olla noodeja tai spiraaleja.

5. Keskus on vaikein tapaus.
Tällöin sääntö 1 ei edes pure
Epälin. voi olla keskus tai spiraali, stabiili tai epästabiili.