Viitteet

Viitteet

Viitteet

1. Matriisieksponenttifunktio

Heikki Apiola

Sisältää Pekka Alestalon ja Timo Eirolan materiaalia myös.

Viitteitä

`[TE]` Timo Eirola: Lineaarialgebra, luentomoniste
`[EN]` Eirola–Nevanlinna: Diffyhtälösysteemit, luentomoniste
`[LAODE]` Golubitsky–Dellniz: Linear Algebra and Differential Equations, Mat-laitoksen käsikirjasto: monta kappaletta.
`[NaSa]` Nagle–Saff: Systems of diff. equ.

Seuraavassa A on reaalinen $n \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat vakioita. Tarkoituksenamme on ratkaista alkuarvotehtävä $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$.

Tavallisen differentiaaliyhtälön $y' = ay$, $y(0) = y_0$, ratkaisu saadaan eksponenttifunktion avulla muodossa $y(t) = y_0 e^{at}$. Herää kysymys, voitaisiinko myös dy-ryhmän $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ ratkaisu kirjoittaa suoraan muodossa $\mathbf{y}(t) = X(t)\mathbf{y}_0$ sopivan ajasta riippuvan $n \times n$-matriisin $X(t)$ avulla. Tästä olisi mm. se etu, että alkuarvotehtävän ratkaisu saadaan samalla vaivalla kuin yleinen ratkaisu. Sijoitetaan tällainen yrite yhtälöön $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, jolloin saadaan $X'(t)\mathbf{y}_0 = AX(t)\mathbf{y}_0$. Tämä toteutuu, jos matriisille $X(t)$ pätee $X'(t) = AX(t)$. Alkuehdosta $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ seuraa lisäksi, että $X(0) = I$ = yksikkömatriisi.

Yhtälön $X'(t) = AX(t)$ toteuttavaan matriisiin X voidaan päätyä monella eri tavalla. Eräs mahdollisuus on etsiä matriisia X potenssisarjan avulla: kirjoitetaan (formaalisti eli ilman huolta suppenemisesta)

$$X(t) = X_0 + tX_1 + t^2X_2 + t^3X_3 + \dots,$$

missä $n \times n$-matriisit $X_0, X_1, \dots$ eivät riipu ajasta t. Koska $X(0) = I$, täytyy olla $X_0 = I$. Lisäksi

$$X'(t) = X_1 + 2tX_2 + 3t^2X_3 + \dots,$$

joten sijoittamalla yhtälöön $X'(t) = AX(t)$ saadaan

$$\begin{aligned} X'(t) &= X_1 + 2tX_2 + 3t^2X_3 + \cdots = A(I + tX_1 + t^2X_2 + t^3X_3 + \dots) \\ &= A + tAX_1 + t^2X_2 + \dots. \end{aligned}$$

Vertaamalla lausekkeiden t^n (matriisi)kertoimia, nähdään että $X_1 = A,\ 2X_2 = AX_1,\ 3X_3 = AX_2$ jne. Ratkaisemalla saadaan siis $X_1 = A,\ X_2 = \frac{1}{2}A^2,\ X_3 = \frac{1}{3!}A^3$ jne. Matriisin $X(t)$ täytyy siis olla muotoa

$$X(t) = I + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots.$$

Koska yhteys tavalliseen eksponenttifunktion sarjakehitelmään on selvä, asetetaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 1. Olkoon B $n \times n$-matriisi. Matriisieksponenttifunktio e^B määritellään sarjakehitelmällä

$$e^B = I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \dots.$$

Ensimmäinen ongelma on se, mitä tämä sarjakehitelmä tarkoittaa. Jos kehitelmä katkaistaan $(k+1)$. termin jälkeen saadaan lauseke

$$I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{k!}B^k,$$

joka on määritelty kaikille neliömatriiseille B. Sarjakehitelmän suppeneminen tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että jokainen ylläolevan matriisin alkio lähestyy tiettyä lukua, kun $k \to \infty$. Voidaan osoittaa, että näin todella käy kaikille neliömatriiseille, ja siten e^B on hyvin määritelty $n \times n$-matriisi.

Tämä on harjoitus 8 AV teht. 6: Osoita, että matriisieksponenttifunktion sarjan suppenee kaikilla neliömatriiseilla A. Tarvitset kahta asiaa:

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

2) Yläraja-arviota matriisin A^k alkioille,jotta pääset käyttämään edellä olevaa sarjaa vertailusarjana kullekin alkiosarjalle.

Voit rajoittua matriisiin, jonka alkiot ovat samoja, koska sillekin asian tulee päteä, ja toisaalta mielivaltaisen matriisin tapauksessa saadaan yläraja-arvio korvaamalla kaikki matriisin alkiot itseisrvoltaan suurimmalla. Käsittele ensin matriisia E, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä, yleinen tapaus palautuu tähän helposti.

Kootaan yhteen e^A:n ominaisuuksia.

Lause 1

1. $e^O = I$, jos O on nollamatriisi
2. $e^{tI} = e^t I$, sillä $I^n = I$ kaikilla n
3. jos D on lävistäjämatriisi `diag([`$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$`])`,
   niin $e^D =$ `diag([`$e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$`])`. Syy: $D^k =$ `diag([`$\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$`])`
4. $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$ (johdettiin alussa!)
5. Alkuarvotehtävän $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, yksikäsitteinen ratkaisu on $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}_0$
6. Differentiaaliyhtälöryhmän $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ yleinen ratkaisu on muotoa $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$, missä $\mathbf{c} = [c_1, \ldots, c_n]^T$ on vapaista parametreista $c_1, \ldots, c_n$ muodostettu vektori
7. $e^{A+B} = e^A e^B$, jos $AB = BA$, mutta ei yleensä muulloin
8. e^A on aina kääntyvä ja $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Tod: Kohdat 1,2,3 ovat varsin selviä.
Kohdan 4. tod. myös suoraan derivoimalla: [EN] Lause 2.2 s. 6.
5 ja 6 seuraavat suoraan dervoimiskaavasta 4. **Huom!** Ratkaisun yksikäsitteisyys voidaan todistaa samantien, tarvitsematta nojautua yleiseen ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseeseen. (Kts. [EN] Lause 2.2)
Kohta 7 voidaan todistaa aivan kuten sarjojen kertominen reaaliluvuilla ([TE] Lause 4.20).
Vaihtoehtoinen todistus kohtaan 7: Funktio $\boldsymbol{y(t)} = e^{(A+B)t}\boldsymbol{y_0}$ on alkuarvotehtävän (lyh. AA-tehtävän) $\boldsymbol{y'} = (A+B)\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y(0)} = \boldsymbol{y_0}$ 1-käs. ratkaisu.

Toisaalta $\boldsymbol{z}(t) = e^{At}e^{Bt}\boldsymbol{y_0}$ on saman AA-tehtävän ratkaisu, sillä

$\boldsymbol{z'}(t) = Ae^{At}e^{Bt}\boldsymbol{y_0} + e^{At}Be^{Bt}\boldsymbol{y_0}$.

Koska $AB = BA$, niin $e^{At}B = Be^{At}$, kuten nähdään kertomalla e^{At}:n sarjakehitelmä vasemmalta ja oikealta B:llä. (Kysymys palautuu siihen, että $AB = BA \implies A^kB = BA^k$.)

Niinpä $\boldsymbol{z'}(t) = (A+B)e^{At}e^{Bt}\boldsymbol{y_0} = (A+B)\boldsymbol{z}(t)$.
Lisäksi $\boldsymbol{z}(0) = e^{A0}e^{B0}\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{y_0}$.

Yksikäsitteisyyslauseen perusteella $e^{(A+B)t}\boldsymbol{y_0} = e^{At}e^{Bt}\boldsymbol{y_0} \;\; \forall \boldsymbol{y_0} \in \mathbb{R}^n$.

Valitsemalla $\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{e}_k, k = 1 \ldots n$, missä $\boldsymbol{e}_k$ on $\mathbb{R}^n$:n $k : s$ yksikkövektori, nähdään kummankin matriisin k:s sarake samaksi kaikilla k:n arvoilla, eli matriisit $e^{(A+B)t}$ ja $e^{At}e^{Bt}$ ovat samoja. $\boxed{7}$

Kohta 8: A ja $-A$ kommutoivat, joten $I = E^O = e^{(A-A)} = e^Ae^{-A}$.

□

Huom! Tarkkaavainen lukija huomaa kehäpäättelyn aineksia, jos sattuu lukemaan myös [EN]-prujusta yksikäsitteisyystodistuksen. Siinä tarvitaan kohdan 8 tulosta, joka todistetaan kohdan 7 avulla. No, [EN]/[TE]-prujuissa ei ole kehäpäättelyä, koska siellä todistetaan ominaisuus 7 eri tavalla. Yllä oleva "puhdistuu" vetoamalla yleiseen (lineaaristen systeemien) olemassaolo- ja yksikäs. lauseeseen.

Miten e^{At} käytännössä lasketaan?

Diagonalisoituvat matriisit: Helpoin tapaus on jälleen diagonalisoituva matriisi. Jos $A = XDX^{-1}$, missä A:n ominaisarvot ovat matriisin D lävistäjällä ja ominaisvektorit matriisin X sarakkeina, niin ensinnäkin

$$A^k = (XDX^{-1})(XDX^{-1})\dots(XDX^{-1})(XDX^{-1}) = XD^kX^{-1},$$

sillä välissä olevat termit $X^{-1}X$ supistuvat pois! Tämän perusteella

$$e^{At} = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \dots = X(I + tD + \frac{1}{2}t^2D^2 + \dots)X^{-1} = Xe^{tD}X^{-1}.$$

Nyt $e^{tD} = \texttt{diag}([e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}])$ ja vastaus saadaan kertomalla nämä kolme matriisia keskenään. Erityisesti on huomattava, että vaikka A:n ominaisarvot ja
-vektorit olisivat kompleksisia, niin lopputulos on tällöinkin reaalinen, koska kaikki sarjakehitelmän potenssit A^k ovat reaalisia matriiseja!

Esimerkki 2. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tällöin $A = XDX^{-1}$, missä

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

tämä eli eräs aikaisempi esimerkki diagonalisoinnista. Nyt $X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, joten

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Tällöin ominaisarvot ovat $1 \pm 3i$ ja niitä vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{x}^{(1)} = [1, i]^T$ ja $\mathbf{x}^{(2)} = [1, -i]^T$. Edelleen on voimassa $A = XDX^{-1}$, jossa

$$D = \begin{bmatrix} 1+3i & 0 \\ 0 & 1-3i \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

Nyt $X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix}$ ja siis

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-3i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{(1+3i)t} + \frac{1}{2}e^{(1-3i)t} & \frac{-i}{2}e^{(1+3i)t} + \frac{i}{2}e^{(1-3i)t} \\ \frac{i}{2}e^{(1+3i)t} + \frac{-i}{2}e^{(1-3i)t} & \frac{1}{2}e^{(1+3i)t} + \frac{1}{2}e^{(1-3i)t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t\cos(3t) & e^t\sin(3t) \\ -e^t\sin(3t) & e^t\cos(3t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sievennysten jälkeen.

Kuten huomaamme, laskujen välivaiheet saattavat näyttää hieman hankalilta, mutta etuna on joka tapauksessa se, että alkuarvotehtävien ratkaisut saadaan heti.

Esimerkki 4. Ratkaise edellisiin matriiseihin liittyvät alkuarvotehtävät $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = [1, 2]^T$.

Esimerkissä 2 ratkaisu on

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t \\ 2e^{2t} \end{bmatrix},$$

eli $y_1(t) = 2e^{2t} - e^t$ ja $y_2(t) = 2e^{2t}$.

Esimerkissä 3 ratkaisu on muotoa

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t\cos(3t) & e^t\sin(3t) \\ -e^t\sin(3t) & e^t\cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t\cos(3t) + 2e^t\sin(3t) \\ 2e^t\cos(3t) - e^t\sin(3t) \end{bmatrix},$$

eli $y_1(t) = e^t\cos(3t) + 2e^t\sin(3t)$ ja $y_2(t) = 2e^t\cos(3t) - e^t\sin(3t)$.

Matriisit, jotka eivät diagonalisoidu: Kaikki matriisit eivät kuitenkaan ole diagonalisoituvia, ja niiden kohdalla on meneteltävä toisella tavalla. Esimerkki tällaisesta matriisista on $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jolla on kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Kun yritämme laskea ominaisvektoreita, saamme yhtälöparin $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, josta ei millään tavalla saada kahta LRT ominaisvektoria.

Tällaisille matriiseille e^{tA} on laskettava jollakin muulla tavalla, ja esimerkiksi yllä olevalle matriisille on $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, joten

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}t^2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}t^3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots & t + t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \dots \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alkuarvotehtävän $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = [1, 2]^T$ ratkaisu on tässä tapauksessa

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + 2te^t \\ 2e^t \end{bmatrix}.$$

Huom. Toinen tapa laskea e^{tA} yllä olevassa esimerkissä on kirjoittaa $A = I + B$ ja käyttää kaavaa $e^{tA} = e^{tI}e^{tB}$, joka on voimassa yhtälön $IB = BI$ perusteella.

Yleinen tapaus voidaan selvittää periaatteessa samalla tavalla, mutta diagonalisoinnin sijasta on käytettävä ns. Jordan-hajotelmaa. Yllä oleva esimerkki liittyykin yksinkertaisimman Jordan-lohkon matriisieksponenttifunktion laskemiseen, ja vastaava päättely yleistyy suuremmille matriiseille.

Matlabin avulla matriisieksponenttifunktio e^{tA} saadaan tekemällä ensin t:stää symbolinen muuttuja käskyllä `syms t` ja kirjoittamalla sitten `expm(A*t)`.

Epähomogeenisen yhtälöryhmän ratkaiseminen. Seuraavassa esitetään, kuinka myös epähomogeeninen differentiaaliyhtälöryhmä $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$ voidaan ratkaista matriisieksponenttifunktion avulla. Tässä A on $n \times n$-vakiomatriisi ja $\mathbf{g}(t) = [g_1(t), \dots, g_n(t)]^T$ on pystyvektori.

Kirjoitetaan yhtälö aluksi muotoon $\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = \mathbf{g}(t)$ ja kerrotaan sen jälkeen molemmat puolet vasemmalta matriisilla e^{-tA}, jolloin saadaan yhtälö $e^{-tA}\mathbf{y}' - e^{-tA}A\mathbf{y} = e^{-tA}\mathbf{g}(t)$. Koska matriiseille on voimassa tulon derivoimissääntö $(XY)' = X'Y + XY'$ (syy: $(XY)_{ij} = \sum_k x_{ik}y_{kj}$, mistä väite seuraa tavallisen tulon derivoimissäännön avulla), niin yhtälö tulee muotoon

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}\mathbf{y}) = e^{-tA}\mathbf{g}(t).$$

Matriiseja derivoidaan alkio kerrallaan, joten niitä voidaan myös integroida alkioittain. Näin ollen saamme

$$e^{-tA}\mathbf{y} = \int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\ dt + \mathbf{c},$$

missä integrointi kohdistuu erikseen pystyvektorin $e^{-tA}\mathbf{g}(t)$ jokaiseen komponenttiin ja $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T$ on integroimisvakioista koostuva pystyvektori. Matriisin e^{-tA} käänteismatriisi on e^{tA}, joten ratkaisuksi saadaan

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\ dt + e^{tA}\mathbf{c}.$$

Tässä termi $e^{tA}\mathbf{c}$ on vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu ja lauseke $e^{tA}\int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\,dt$ on puolestaan alkuperäisen yhtälön yksittäisratkaisu. Matriisieksponenttifunktion avulla yksittäisratkaisulle saadaan siis eksplisiittinen lauseke. Yleensä saattaa kuitenkin olla helpompi hakea yksittäisratkaisua sopivan yritteen avulla, sillä yo. kaava johtaa usein osittaisintegrointeihin.

Jos halutaan ratkaista yhtälöryhmään $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$ liittyvä alkuarvotehtävä $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, niin voidaan käyttää määrättyä integraalia välillä $[0, t]$. Koska

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{-sA}\mathbf{y}(s))\,ds = e^{-tA}\mathbf{y}(t) - e^{O}\mathbf{y}(0) = e^{-tA}\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0,$$

niin alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}_0 + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\mathbf{g}(s)\,ds.$$

Esimerkki 5. Ratkaistaan ryhmä $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$, missä A on esimerkin 2 matriisi ja $\mathbf{g}(t) = [1, e^t]^T$. Aikaisemmin laskettiin

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

joten

$$e^{-tA} = e^{(-t)A} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$e^{-tA}\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 1 \\ e^{-t} \end{bmatrix},$$

joten

$$\int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int(2e^{-t} - 1)\,dt \\ \int e^{-t}\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} - t \\ -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ryhmän yksittäisratkaisu on siis muotoa

$$\mathbf{y}_0(t) = e^{tA}\int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\,dt = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2e^{-t} - t \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^t - e^t - 1 \\ -e^t \end{bmatrix},$$

jonka avulla yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} y_1(t) = (c_1 - c_2)e^t + c_2e^{2t} - te^t - e^t - 1 \\ y_2(t) = c_2e^{2t} - e^t. \end{cases}$$

Vastaavalla tavalla saadaan esimerkiksi alkuarvotehtävän $\mathbf{y}(0) = [1, 2]^T$ ratkaisuksi

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \int_0^t(2e^{-s} - 1)\,ds \\ \int_0^t e^{-s}\,ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - te^t - e^t - 1 \\ 3e^{2t} - e^t \end{bmatrix}.$$

Stabiilisuus. Matriisieksponenttifunktion avulla voidaan tutkia myös tasapainoratkaisujen stabiilisuutta ja tyyppiä. Diagonalisoituville matriiseille $e^{tA} = Xe^{tD}X^{-1}$, joten tyyppi ja stabiilisuus selviävät suoraan lävistäjämatriisin e^{tD} käyttäytymistä tutkimalla.

Viitteet