

Mat-1.192 Numeerinen ja symbolinen laskenta kevät 2004

<http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/H/>

Laskuharjoitus 7 (viikko 15–16 , 6 – 15.4. 2004)

Lisäyksiä, korjauksia ja tarkennuksia 6.4.

Niitä on tehty edelliseen versioon verrattuna, mainittakoon tässä nämä:

Teht. 2 jätetään Greenin funktio, (c)-kohta pois.

Tehtävässä 3 on tarkoitus ratkaista 11.5 (a), sitä täsmennettiin (helpotettiin). Lisättiin tehtävä, joka numeroitiin 4:ksi, siirrettiin vanha 4 tehtäväksi 5.

Tehtäviä 3 ja 4 voidaan pitää päätehtävinä.

Jatketaan yhdessä tekemistä ti 6.4, ja käydään ratkaisut läpi pääsiäisen jälkeen (to 15.4.)

Sovitaan projekteista ja aikataulusta mahdollisuuksien mukaan ti 6.4. Osa projekteista voi hyvin olla osdiffyht. aiheeseen liittyvää, vaikkapa pääasiassa tässä oleviin lähteisiin pohjautuvaa "projektiainesta". Siitä riittää useammallekin tekijälle.

Lähteitä:

Moler: Ch 11

Tweito–Winther: Intro to PDE's, A computational approach, Springer 1998

Kreyszig

<http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/matlab/moler/>

1. Muodosta 1-ulotteisen Laplace-operaattorin diskretointioperaattorin Δ_h matriisiesitys, olkoon se $\frac{1}{h^2}D$. Tässä $h = \frac{1}{m+1}$, jos välin pituus = 1 ja jakopisteitä on reunat mukaan lukien $m + 2$ kpl (aivan kuten Molerissa). Muodosta matriisi D `spdiags`-komennolla, kokeile jollain pienellä n :llä. (Muistahan, että `full` näyttää matriisin täytenä.)
Muodosta neliöalueen 2-ulotteisen Laplace-operaattorin Δ_h matriisiesitys $\frac{1}{h^2}A$. Matriisin A muodostamiseen on elegantteja tapoja, eräs tyylkkäimmistä pohjautuu ilmaisuun $\text{kron}(D, I) + \text{kron}(I, D)$, missä I on yksikkömatriisi.

Selvitä huolellisesti, miksi.

Muodosta matriisi A myös suoraan `spdiags`:lla. Tarvitset yhtenä sivulävistäjänä ykkösvektorin, jossa joka n :s (sopiva n) alkio nollataan. Tämä on kätevää tehdä vaikkapa tyylin `~mod(v,n)==0`, missä v on indeksivektori $v=1$:pituus. (Varo matoa, jos käytät desktoppia Unixissa!)

2. Moler 11.2. Käytä (b)-kohtaan tietysti mieluummin Maplea suoraan. Jätetään tämä väliin, jos joku on ehtinyt tehdä, annetaan plussia: (c) Muodosta tehtävälle Greenin funktio, määrittele se Maple-funktioksi ja kirjoita ratkaisu sen avulla.
3. Tutki ja täydennä seuraavaa Matlab-koodia.

```
n=4;
h = ...
[x,y] = meshgrid(-3:h:3);
f = peaks(x,y);
contourf(x,y,f)

e = ones(n,1);
D = spdiags(...);
I = eye(n,n);
A = (1/h^2)*...
j = 2:n+1;
F = f(j,j);
U = A\F(:);
u = zeros(n+2,n+2);
u(j,j) = reshape(U,n,n);
```

Rakenna näistä aineksista yleinen Poissonin yhtälön ratkaisija neliöalueessa. Riittää ottaa 0-reunaehdot, mikä tekee tehtävän varsin helppoksi. (Yleiset (Dirichlet'n) reunaehdot tulevat mukaan tehtävässä 5.) Ratkaise sitten tehtävä 11.5 (a).

4. Selvittele luentokalvojen `../L/differenssikalvoja.pdf` avulla Poissonin yhtälön oikeaoppista Matlab-tyylistä ratkaisutapaa. Voit tehdä koneen ääressä kokeiluja `../PDE.m`-tiedostoa mukaillen.
Pohjana on Molerin koodi funktiolle `delsq`.
Selvittele koodin toiminta ja muokkaa siitä yleinen Poissonin yhtälön ratkaisija alueessa, jonka geometrian määrää indeksimatriisi G , joka saadaan muutamalle tyyppigeometrialle `numgrid`-funktiolle, mutta yleisem-

min käyttämällä `inregion`-funktiota ¹ [Moler-odes]-prujun s. 6 mukaisesti.

Huomaa, että koodissa olevan for-silmukan sisällä tarvitsee vain valita reunasolmujen indeksit ja päivittää niiden avulla b-vektoria (joka alustetaan loopin ulkopuolella "lähdefunktion" f arvoilla.)

Sovella muutamaan erityyppiseen geometriaan ja lähde-termini sekä reunaehtoihin.

5. 11.6. "Method of lines". Opettavaisempaa olisi aloittaa (c)-kohdasta, mutta tee missä järjestyksessä haluat.

Ohjeita

Teht. 3.

Jos teet peaks-funktiolle, voisi alku olla tällainen:

```
function u=peaks_poisson(n);
% 2-D Poissonin yhtälö, lähde : peaks(x,y), reuna-arvot = 0.

if nargin < 1, n = 31; end
h = 6/(n+1);
```

Lopussa voisi piirrellä vaikka näin:

```
subplot(1,2,1)
contourf(x,y,f,-8:1:8)
caxis([-8 8])
axis square
colorbar
set(gca,'ytick',get(gca,'xtick'))
```

```
subplot(1,2,2)
a = min(min(u));
b = max(max(u));
c = a + (b-a)*(0:1:10)';
contourf(x,y,u,c)
caxis([a b])
axis square
colorbar
```

```
set(gca,'ytick',get(gca,'xtick'))
```

```
figure(2)
subplot(1,2,1)
mesh(x,y,f)
```

```
subplot(1,2,2)
mesh(x,y,u)
```

Teht. 4

Tässä on yleisen yhdesti yhtenäisen, polygonin rajoittaman alueen käsittelyä selventävä skripti (Molerin prujun ja `help inregion:n` yhdistelmä.)

```
clear ; close all
xv=[0 0 1 1 -1 -1 0]; yv=[0 -1 -1 1 1 0 0]
fill(xv,yv,'y')
n=4; h=1/(n+1);
[x,y]=meshgrid(-1:h:1);
%help inregion
[in,on] = inregion(x,y,xv,yv);
hold on
p = find(in-on); % Sisäsolmujen indeksit (jonouttettuina)
q = find(on); % Reunasolmujen indeksit
plot(xv,yv,'-',x(p),y(p),'ko',x(q),y(q),'ro')
```

¹`inregion` löytyy: `../matlab/moler/:sta.`