Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.192 Numeerinen ja symbolinen laskenta kevät 2004
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/H/`

Laskuharjoitus 5 (viikko 10–11 , 9 – 18.3 2004)

Tässä korjatut (toivottavasti oikein):

`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/matlab/moler/odes.pdf`
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/matlab/CV/CHAPTER.9`
`http://www.math.hut.fi/teaching/numsym/04/L/ODE.html` ODE-"portaali"

Jaossa: [Hig-Hig] ODE, erityiseti "events".

Aikataulu

Ti 16.3: Neuvontaharjoitus harj. 4 ja harj5 tehtävien edistämiseen.

To 18.3: Käydään läpi tehtävät 4 ja 5. Täydennetään tehtäviä 5: "stability, stiffness", annetaan myös tehtäviä osdy-aiheista. Alla on jo osittain täydennetty, mutta torstaiksi riittää tehdä aiemman, puhtaasti Matlab-tekniikkaa opettavan tavan mukaan.

1. Tässä harjoitellaan aihetta "events". Hyvin selostettu [Hig-Hig]:ssä, samoin Molerissa. (Matlabissa on demoja mm. orbitode, mutta sen pohjalta ei ole aivan helppo opiskella.)

   Tässä eräs perustehtävä: Pallo pudotetaan korkeudelta $h_0 = 4m$, ilmanvastusta ei oteta huomioon. Mallinnuksessa ei ole tuskaa, annetaan silti systeemi valmiina: $y_1' = y_2, y_2' = -g, \quad y(0) = h_0, y'(0) = 0$.

   (a) Millä ajanhetkellä pallo saavuttaa maanpinnan. Tarkoitus on ratkaista numeerisesti ja käyttää "events-tekniikkaa. Toki kannattaa verrata analyyttiseen ratkaisuun tässä tapauksessa.

   (b) Kun pallo törmää maanpintaan, se pomppaa ylöspäin. Olkoon pompun alkunopeus itseisarvoltaan k kertaa törmäyshetken nopeuden itseisarvo, $0 < k < 1$.

   Määritä 10:n ensimmäisen pompun aika ja korkeus, kun $k = 0.7$. Piirrä pomppivan pallon korkeus ajan funktiona.

   Huom! Tässä kannattaa samalla opetella käyttämään alifunktioita, eli kirjoitetaan kaikki yhteen m-tiedostoon, joka alkaa "pääohjelmalla". Kutsuttavat funktiot kirjoitetaan "skriptiosan"perään, skripti on ainakin muodollisesti funktio, ja ihan käytännössäkin voi olla hyödyksi, jos sillä voidaan välittää jokunen syöteparametri. vrt. Moler ss. 24–25

   ```
   function orbit(reltol)
     ...
   ```

2. [Moler] 7.14 s. 39 Kommentteja, muutosehdotuksia.

   a)-kohta on hiukan outo, mies/nainen pudotetaan lentokoneesta, laskuvarjolla ei ole mitään vaikutusta. Tehtävä on toisaalta raaka, toisaalta naurettavan helppo lukion fysiikan tehtävä (ja samanlainen kuin edellä).

   b)-kohdassa on ehkä sopivampaa ottaa vakioiksi K_1 ja K_2 10− kertaiset arvot: $K_1 = 1/15, K2 = 4/15$.

Moler 7.4 s. 35
Stabiilisuus ja kankeus, kts. alla. Täydennetään Molerin tehtävää hiukan, saadaksemme lisävalaistusta. Tee Matlab-toteutuksen lisäksi Maplella seuraavia:

Muodosta analyyttinen ratkaisu `dsolve`:lla ja piirrä esim. väleillä $[0, 0.02]$ ja $[0, 0.5]$. Katso myös yleistä ratkaisua.

Ratkaise yhtälö Euerin menetelmällä välillä $[0, 0.5]$. Tiedostossa `.../maple/ns04.mpl` on `Eulerh`, jonka koodi on myös alla. Kokeile maksimaalista askelpituutta h_{max} ja sen puolikasta.

Havainnollista kuvin.

Tähän yhteyteen sopii oikein hyvin implisiittinen Euler, mutta otetaan siihen liittyvää ensi viikoksi.

Seuraavana asiakokonaisuutena käsitellään osittaisdiffyhtälöiden numeriikkaa. Sopivana siirtymävaiheena otetaan "method of lines", jossa "laskentakoneena" on ODE-ratkaisija (suuri tavallinen differentiaaliyhtälöryhmä).

[Moler]-prujuissa on koko joukko kiintoisia sovellustehtäviä, kuten tästä ODE-osasta huomataan. Näihin liittyen on myös mahdollista kehitellä loppuprojektiksi jokin sopiva kokoelma tehtäviä mahd. täydennettynä ja/modifioituina soveliaasti.

Stabiilisuus, kankeus (stiffness)

Eulerin menetelmän stabiilisuusehto stabiilille yhtälölle ($f_y < 0$) on $h < 2/f_y$.

```
Eulerh:=proc(f,vali,ya,h)
local a,b,n,m,t,y;
a:=vali[1]; b:=vali[2];
t[0]:=evalf(a);y[0]:=evalf(ya);
m:=ceil((b-a)/h);
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
end do;
[seq([t[n],y[n]],n=0..m)];
end:
```