Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
9. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1
*Lie*n derivaatta on (Box 5.17)

$$\mathcal{L}_v(\bullet) = \phi_*(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\phi^*(\bullet)), \tag{1}$$

missä kineettisen tensorin siirto ϕ_* ja palautus ϕ^* on määritelty (Box 5.16)

$$\phi_*(\bullet) = \mathbf{F}\cdot(\bullet)\cdot\mathbf{F}^T \qquad \text{ja} \qquad \phi^*(\bullet) = \mathbf{F}^{-1}\cdot(\bullet)\cdot\mathbf{F}^{-T}\,. \tag{2}$$

Kirchhoffin jännityksen hydrostaattinen ja deviatorinen osa ovat

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{I} \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{dev}} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\,. \tag{3}$$

Hydrostaattisen osan Lien derivaataksi saadaan edellä esitettyjä määritelmiä käyttäen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}) &= \phi_*(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\phi^*(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}})) \\
&= \mathbf{F}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\big(\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{F}^{-T}\big)\mathbf{F}^T \\
&= \mathbf{F}\big(\dot{\mathbf{F}}^{-1}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\dot{\mathbf{F}}^{-T}\big)\mathbf{F}^T\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Käyttämällä tuloksia

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{F}}^{-T} = -\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}^{-T} \tag{5}$$

saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}) &= \mathbf{F}\big(\dot{\mathbf{F}}^{-1}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\dot{\mathbf{F}}^{-T}\big)\mathbf{F}^T \\
&= \mathbf{F}\big(-\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}^{-T}\big)\mathbf{F}^T \\
&= -\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}} + \dot{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{hyd}} - \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ottamalla huomioon nopeus- ja muodonmuutosgradientin välinen yhteys (3.3.18)

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{L}^T = \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T \tag{7}$$

saadaan Kirchhoffin jännityksen hydrostaattisen osan Lien derivaataksi

$$\mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}) = \dot{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{hyd}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}} - \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}\mathbf{L}^T = \frac{1}{3}\big(\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\tau}})\mathbf{I} - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{L}+\mathbf{L}^T)\big). \tag{8}$$

Kirchhoffin jännityksen deviatorisen osan Lien derivaataksi saadaan

$$\mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{dev}}) = \mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}) = \mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau}) - \mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}), \tag{9}$$

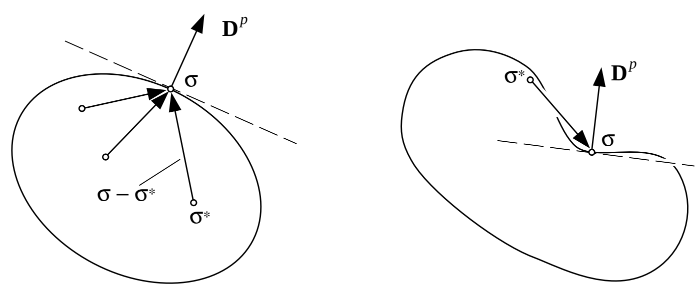
josta edellä laskettua hydrostaattisen osan derivaattaa sekä oppikirjassa johdettua yhteyttä (5.10.5) $\mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau}) = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{L}^T$ hyväksi käyttämällä saadaan

$$\mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{dev}}) = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{L}^T - \frac{1}{3}\big(\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\tau}})\mathbf{I} - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})(\mathbf{L}+\mathbf{L}^T)\big). \tag{10}$$

Teht. 2
Kirjoittamalla 2. kertalukua olevat jännitystensori ja plastinen venymänopeustensori *Voight*in notaatiota käyttäen vektoreina saadaan plastisen dissipaation maksimiperiaate kirjoitettua

$$\{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)\} \cdot \{\mathbf{D}^p\} \geq 0, \tag{11}$$

missä siis nyt jännitykset ja plastinen venymänopeus ovat vektoreita kuusidimensioisessa avaruudessa. Oletetaan myötöpinnan olevan sileä, jolloin sen jokaisessa pisteessä on olemassa hyvin määritelty tangenttitaso ja ulkonormaali. Kuvan (1a) mukaan, jos yhtälö (11) on voimassa kaikilla myötöpinnan sisällä olevilla pistellä $\boldsymbol{\sigma}^*$, on $\mathbf{D}^p$ oltava ulospäin suunnatun normaalin suuntainen (*normaalisuussääntö*). Kuvan (1b) mukaisesti, jos on olemassa piste $\boldsymbol{\sigma}^*$, joka on tangenttitason ulkopuolella, ei yhtälö toteudu. Toisin sanoin koko elastisen alueen on oltava samalla puolella tangenttitasoa ja myötöpinta on näin ollen konveksi.



Kuva 1: Myötöpinnan ominaisuuksia assosiatiivista myötösääntöä käytettäessä: (a) normaalisuus ja (b) konveksisuus.

Teht. 3
Kohta (a): Johdetaan ensin hyödylliset aputulokset

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} : \boldsymbol{I}^{\text{dev}} &= \mathbf{I} : (\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{I})\mathbf{I} = \mathbf{0}, &(12)\\
\boldsymbol{I}^{\text{dev}} : \boldsymbol{I}^{\text{dev}} &= (\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : (\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) = \boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{9}\text{tr}(\mathbf{I})\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \boldsymbol{I}^{\text{dev}}. &(13)
\end{aligned}$$

Tensorin $\mathbf{C}^{-1}$ laskemiseksi valitaan intuitiota käyttäen yrite $\mathbf{C}^{-1} = c_1\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + c_2\boldsymbol{I}^{\text{dev}}$, missä c_1 ja c_2 ovat toistaiseksi tuntemattomia vakioita. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C} &= (c_1\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + c_2\boldsymbol{I}^{\text{dev}}) : (K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{I}^{\text{dev}})\\
&= Kc_1\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu c_1\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \boldsymbol{I}^{\text{dev}} + Kc_2\boldsymbol{I}^{\text{dev}} : \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu c_2\boldsymbol{I}^{\text{dev}} : \boldsymbol{I}^{\text{dev}}\\
&= 3Kc_1\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu c_2\boldsymbol{I}^{\text{dev}}\\
&= 3Kc_1\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu c_2(\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) = 2\mu c_2\boldsymbol{I} + (3Kc_1 - \frac{2\mu c_2}{3})\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. &(14)
\end{aligned}$$

Käytämällä neljännen kertaluvun käänteistensorin ominaisuutta $\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C} = \boldsymbol{I}$ saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2\mu c_2 = 1 \\ 3Kc_1 - 2\mu c_2/3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{9K}, \quad c_2 = \frac{1}{2\mu}\ , \tag{15}$$

jolloin tensoriksi $\mathbf{C}^{-1}$ saadaan

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{9K}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{I}^{\text{dev}}. \tag{16}$$

Kohta (b): Jotta tehtäväpaperissa annettu lauseke pätisi, tulisi olla

$$(\mathbf{C} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}}) : (\mathbf{C}^{-1} + a\hat{\boldsymbol{I}}) = \boldsymbol{I}, \qquad b = \frac{2\mu a}{1+2\mu a}\ . \tag{17}$$

Kirjoittamalla kaksoispistetulo auki saadaan

$$\begin{aligned}(\mathbf{C} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}}) : (\mathbf{C}^{-1} + a\hat{\boldsymbol{I}}) &= \mathbf{C} : \mathbf{C}^{-1} + a\mathbf{C} : \hat{\boldsymbol{I}} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}} : \mathbf{C}^{-1} - 2\mu ab\hat{\boldsymbol{I}} : \hat{\boldsymbol{I}} \\ &= \boldsymbol{I} + a\mathbf{C} : \hat{\boldsymbol{I}} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}} : \mathbf{C}^{-1} - 2\mu ab\hat{\boldsymbol{I}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Edellä on käytetty yhteyttä

$$\hat{\boldsymbol{I}} : \hat{\boldsymbol{I}} = \hat{\boldsymbol{I}} : (\boldsymbol{I}^{\text{dev}} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\boldsymbol{I}}, \tag{19}$$

joka saadaan projektiotensorin $\hat{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I}^{\text{dev}} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}$ ominaisuuksia (5.9.21)[1] käyttämällä. Lausekkeiden (17) ja (18) yhtäsuuruusehdon perusteella tulee olla

$$a\mathbf{C} : \hat{\boldsymbol{I}} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}} : \mathbf{C}^{-1} - 2\mu ab\hat{\boldsymbol{I}} = \mathbf{0}. \tag{20}$$

Sijoittamalla tähän isotrooppinen elastisuustensori ja edellisessä tehtävässä laskettu käänteistensorin lauseke saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= a(K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{I}^{\text{dev}}) : \hat{\boldsymbol{I}} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}} : (\frac{1}{9K}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{I}^{\text{dev}}) - 2\mu ab\hat{\boldsymbol{I}} \\ &= a \cdot 2\mu\hat{\boldsymbol{I}} - 2\mu b \cdot \frac{1}{2\mu}\hat{\boldsymbol{I}} - 2\mu ab\hat{\boldsymbol{I}} = (2\mu a - b - 2\mu ab)\hat{\boldsymbol{I}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Tulisi siis olla voimassa

$$2\mu a - b - 2\mu ab = 0. \tag{22}$$

Sijoittamalla tähän b saadaan

$$2\mu a - \frac{2\mu a}{1+2\mu a} - 2\mu a\frac{2\mu a}{1+2\mu a} = \frac{2\mu a + 4\mu a^2 - 2\mu a - 4\mu a^2}{1+2\mu a} = 0. \tag{23}$$

Näin ollen osoitetiin päteväksi tulos

$$(\mathbf{C}^{-1} + a\hat{\boldsymbol{I}})^{-1} = \mathbf{C} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}}, \qquad b = \frac{2\mu a}{1+2\mu a}\ . \tag{24}$$

Teht. 4

Kohta (a): Oppikirjaan (Box 5.6) on kerätty J_2-teorian yhtälöt isotrooppisen lujittumisen tapauksessa. Pienten venymien tapauksessa ei eri jännitysmitoilla ole eroa ja venymänopeustensori $\mathbf{D}$ korvataan pienten venymien venymänopeudella $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Myötösuunnaksi saadaan

$$\mathbf{r} = \frac{3}{2\bar{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}, \qquad \bar{\sigma} = \big(\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\big)^{1/2} \tag{25}$$

Tästä saadaan derivoimalla

$$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2}\Big(\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} \otimes \frac{\partial\bar{\sigma}^{-1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{\bar{\sigma}}\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\Big). \tag{26}$$

Suluissa olevista osittaisderivaattatermeistä saadaan

$$\frac{\partial\bar{\sigma}^{-1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\Big)^{-3/2} \cdot \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\big(\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\big) = -\frac{3}{4\bar{\sigma}^3} \cdot 2\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = -\frac{3}{2\bar{\sigma}^3}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{I}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{I}^{\text{dev}}\ . \tag{28}$$

[1] $\hat{\boldsymbol{I}} : \hat{\mathbf{n}} = 0$, $\hat{\boldsymbol{I}} : \mathbf{I} = 0$, $\hat{\boldsymbol{I}} : \boldsymbol{I}^{\text{dev}} = \hat{\boldsymbol{I}}$

Sijoittamalla tulokset saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{3}{2}\Big(-\frac{3}{2\bar{\sigma}^3}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\otimes\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}+\frac{1}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{I}^{\text{dev}}\Big)\\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\boldsymbol{I}^{\text{dev}}-\frac{1}{\bar{\sigma}}\Big(\frac{3}{2\bar{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\otimes\frac{3}{2\bar{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\Big)\\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}\boldsymbol{I}^{\text{dev}}-\frac{1}{\bar{\sigma}}\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}}(\boldsymbol{I}^{\text{dev}}-\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) = \frac{3}{2\bar{\sigma}}\hat{\boldsymbol{I}}\,,\end{aligned}\tag{29}$$

missä $\hat{\boldsymbol{I}}$ on ns. *projektiotensori*. Edellä saatu lopputulos on annettu ilman johtoa oppikirjan yhtälöissä (5.9.20).

Kohta (b): Kerätään muutamia tarvittavia yhtälöitä (Box 5.6):

$$f_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{h}_{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{r}. \tag{30}$$

Oppikirjassa johdettu algoritmisen modulin lauseke on

$$\mathbf{C}^{\text{alg}} = \big(\widetilde{\mathbf{C}} - \frac{(\widetilde{\mathbf{C}}:\mathbf{r})\otimes(f_{\boldsymbol{\sigma}}:\widetilde{\mathbf{C}})}{f_{\boldsymbol{\sigma}}:\widetilde{\mathbf{C}}:\mathbf{r}+f_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{Y}\cdot\mathbf{h}}\big), \tag{31}$$

missä (5.9.37)

$$\widetilde{\mathbf{C}} = (\mathbf{C}^{-1}+\Delta\lambda\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}})^{-1}, \qquad \mathbf{Y} = (-\mathbf{I}+\Delta\lambda\mathbf{h}_{\mathbf{q}})^{-1}. \tag{32}$$

Tämän tehtävän kohdan (a) perusteella saadaan

$$\widetilde{\mathbf{C}} = (\mathbf{C}^{-1}+\frac{3\,\Delta\lambda}{2\bar{\sigma}}\hat{\boldsymbol{I}})^{-1} = (\mathbf{C}^{-1}+a\hat{\boldsymbol{I}})^{-1}, \tag{33}$$

josta tehtävän 3 tulosta hyödyntäen saadaan edelleen

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}}. \tag{34}$$

Keskimmäistä yhtälöistä (30) käyttäen saadaan $\mathbf{Y} = -\mathbf{I}$. Projektiotensorin ominaisuuksia ja viimeistä yhtälöistä (30) käyttäen saadaan tulos $\widetilde{\mathbf{C}}:\mathbf{r} = \mathbf{C}:\mathbf{r}$. Sijoittamalla nyt saadut tulokset algoritmisen modulin lausekkeeseen saadaan

$$\mathbf{C}^{\text{alg}} = \mathbf{C} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}} - \frac{(\mathbf{C}:\mathbf{r})\otimes(\mathbf{r}:\mathbf{C})}{\mathbf{r}:\mathbf{C}:\mathbf{r}-f_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{h}}\big) = \mathbf{C}^{ep} - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}}. \tag{35}$$

Harjoituskierroksella 7 tehtävässä 4 saatiin tulos

$$\mathbf{C}^{ep} = K\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mu\big(\boldsymbol{I}^{\text{dev}} - \gamma\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}\big). \tag{36}$$

Tätä käyttäen voidaan algoritmisen modulin lauseke kirjoittaa

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{\text{alg}} &= K\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mu\big(\boldsymbol{I}^{\text{dev}}-\gamma\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}\big) - 2\mu b\hat{\boldsymbol{I}}\\ &= K\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mu\big(\boldsymbol{I}^{\text{dev}}-\gamma\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}\big) - 2\mu b\big(\boldsymbol{I}^{\text{dev}}-\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}\big)\\ &= K\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mu(1-b)\boldsymbol{I}^{\text{dev}} - 2\mu(\gamma-b)\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}\,.\end{aligned}\tag{37}$$

Ottamalla käyttöön lyhennysmerkinnät

$$\beta = 1-b, \qquad \bar{\gamma} = \gamma - b \tag{38}$$

saadaan algoritmisen modulin lopulliseksi lausekkeeksi

$$\mathbf{C}^{\text{alg}} = K\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mu\beta\boldsymbol{I}^{\text{dev}} - 2\mu\bar{\gamma}\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}. \tag{39}$$