Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
2. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1
Kirjoittamalla tensoreiden $\mathbf{S}$ ja $\mathbf{W}$ kaksoispistetulo komponenttimuodossa saadaan

$$\mathbf{S} : \mathbf{W} = S_{11}W_{11}+S_{12}W_{12}+S_{13}W_{13}+S_{21}W_{21}+S_{22}W_{22}+S_{23}W_{23}+S_{31}W_{31}+S_{32}W_{32}+S_{33}W_{33}. \quad (1)$$

Tensorin $\mathbf{S}$ symmetriasta seuraa

$$S_{21} = S_{12}, \quad S_{32} = S_{23}, \quad S_{31} = S_{13}. \quad (2)$$

Tensorin $\mathbf{W}$ vinosymmetriasta seuraa

$$W_{11} = W_{22} = W_{33} = 0, \quad W_{21} = -W_{12}, \quad W_{32} = -W_{23}, \quad W_{31} = -W_{13}. \quad (3)$$

Ottamalla ominaisuudet (2) ja (3) huomioon saadaan

$$\mathbf{S} : \mathbf{W} = S_{12}(W_{12} - W_{12}) + S_{13}(W_{13} - W_{13}) + S_{23}(W_{23} - W_{23}) = 0. \quad (4)$$

Tehtävän (b) kohdasta saadaan

$$\mathbf{A}^{-T} : \mathbf{A} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{I}) = 1 + 1 + 1 = 3. \quad (5)$$

Teht. 2
Kahden vektorin pistetulo on skalaari, joka vektorien komponenttien avulla lausuttuna on

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (6)$$

Kahden vektorin (1. kertaluvun tensorin) *tensori-* tai *dyaditulo* on toisen kertaluvun tensori, jonka komponentit ovat

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1u_1 & v_1u_2 & v_1u_3 \\ v_2u_1 & v_2u_2 & v_2u_3 \\ v_3u_1 & v_3u_2 & v_3u_3 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Teht. 3
Suoran $x_1 = x_2/3 - 1$ suuntavektori koordinaatin x_1 kasvaville arvoille on

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2} = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{u}} = \left\{ \begin{array}{c} 1/3 \\ 1 \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Normeerataan saatu suuntavektori

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{9} + \frac{9}{9} = \frac{10}{9} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right\}. \quad (9)$$

Skalaarikentän $\Phi(\mathbf{x}) = e^{x_1}\cos(3x_1 - 2x_2)$ suunnatuksi derivaataksi saadaan

$$\mathrm{D}\Phi(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\Phi(\mathbf{x} + \epsilon\,\mathbf{u})\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\, e^{x_1+\epsilon u_1}\cos\big(3(x_1 + \epsilon u_1) - 2(x_2 + \epsilon u_2)\big)\Big|_{\epsilon=0}. \quad (10)$$

Suorittamalla derivointi ja asettamalla $\epsilon = 0$ saadaan

$$\mathrm{D}\Phi(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = e^{x_1}[u_1\cos(3x_1 - 2x_2) - (3u_1 - 2u_2)\sin(3x_1 - 2x_2)]. \quad (11)$$

Sijoittamalla tähän edellä laskettu suuntavektori $\mathbf{u}$ sekä annetun pisteen koordinaatit $\mathbf{x} = (0, 1)$ saadaan tulokseksi

$$\mathrm{D}\Phi(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \frac{1}{\sqrt{10}}\big(1 \cdot \cos(-2) - (3 - 6)\sin(-2)\big) = \frac{1}{\sqrt{10}}\big(\cos 2 - 3\sin 2\big) \approx -0.9942. \quad (12)$$

Teht. 4
Kohta (a). Skalaarifunktion $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ suunnatuksi derivaataksi saadaan

$$\mathrm{D}\varphi(\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\varphi(\mathbf{v}+\epsilon\mathbf{u})\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,(\mathbf{v}+\epsilon\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}+\epsilon\mathbf{u})\Big|_{\epsilon=0}\ , \tag{13}$$

josta derivointi suorittamalla saadaan

$$\mathrm{D}\varphi(\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \big(\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\epsilon\mathbf{u}) + (\mathbf{v}+\epsilon\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\big)\Big|_{\epsilon=0} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}. \tag{14}$$

Kohta (b). Tensoriarvoisen funktion $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ suunnatuksi derivaataksi saadaan

$$\mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\mathbf{G}(\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,(\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})(\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})\Big|_{\epsilon=0}\ , \tag{15}$$

josta derivointi suorittamalla saadaan

$$\mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \big(\mathbf{U}(\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U}) + (\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})\mathbf{U}\big)\Big|_{\epsilon=0} = \mathbf{U}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{U}. \tag{16}$$

Kohta (c). Skalaariarvoisen funktion $\varphi(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})^2$ suunnatuksi derivaataksi saadaan

$$\mathrm{D}\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\varphi(\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{U})^2\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\big(\mathrm{tr}(\mathbf{A})+\epsilon\ \mathrm{tr}(\mathbf{U})\big)^2\Big|_{\epsilon=0}\ , \tag{17}$$

josta derivointi suorittamalla saadaan

$$\mathrm{D}\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = 2\big(\mathrm{tr}(\mathbf{A})+\epsilon\ \mathrm{tr}(\mathbf{U})\big)\mathrm{tr}(\mathbf{U})\Big|_{\epsilon=0} = 2\mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{U}) = 2\mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathbf{I}:\mathbf{U}. \tag{18}$$

Teht. 5
Kohta (a). Vektoriarvoisen funktion gradientti on

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\big(f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})\big) = \mathrm{D}\big(f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})\big)[\mathbf{u}]. \tag{19}$$

Tulon derivointikaavaa käyttämällä saadaan

$$\mathrm{D}(f\mathbf{v})[\mathbf{u}] = f\,(\mathrm{D}\mathbf{v}[\mathbf{u}]) + (\mathrm{D}f[\mathbf{u}])\mathbf{v} = f(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla f)\mathbf{v}. \tag{20}$$

Edellä on kirjoitusasun selkiyttämiseksi jätetty argumentti $\mathbf{x}$ merkitsemättä. Kirjoittamalla lausekkeen (20) viimeinen termi tensorituloa käyttäen saadaan

$$\mathrm{D}(f\mathbf{v})[\mathbf{u}] = f(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\otimes\nabla f)\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\big(f\nabla\mathbf{v} + (\nabla f)\otimes\mathbf{v}\big). \tag{21}$$

Edellä on käytetty yhteyttä $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T = (\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})$. Pyydetyksi differentiointikaavaksi saadaan näin ollen

$$\nabla(f\mathbf{v}) = f\nabla\mathbf{v} + (\nabla f)\otimes\mathbf{v}. \tag{22}$$

Kohta (b) Vektoriarvoisen funktion $\mathbf{g}$ divergenssi $\mathrm{div}(\mathbf{g}) = \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{g})$. Ottamalla trace kohdan (a) tuloksesta saadaan

$$\mathrm{div}(f\mathbf{v}) = \mathrm{tr}\big(f\nabla\mathbf{v}\big) + \mathrm{tr}\big(\mathbf{v}\otimes\nabla f\big) = f\,\mathrm{div}\mathbf{v} + (\nabla f)\cdot\mathbf{v}. \tag{23}$$