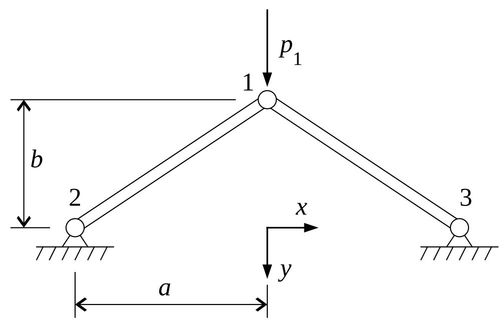
Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
10. harjoituksen ratkaisut

Teht. 1
Tarkastellan kuvan (1) mukaisen kahdesta identtisestä sauvasta koostuvan tasoristikon tasapainoa.



Kuva 1: Tehtävässä tarkasteltava tasoristikko.

Sijoittamalla sauvan sisäisen energian lausekkeeseen jännitys S_{11} lausuttuna konstitutiivisen yhteyden $S_{11} = E^{SE} E_{11}$ avulla saadaan rakenteen sisäiseksi energiaksi

$$W^{int} = \sum_{e=1}^{2} \int_{\Omega_0^e} \Big(\int_0^{E_{11}} S_{11} \mathrm{d} E_{11} \Big) \, \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{2} \int_{\Omega_0^e} E_{SE} E_{11}^2 \, \mathrm{d}\Omega. \tag{1}$$

Kuvan (1) mittoja käyttäen saadaan sauvan pituusakselin suuntaisessa korotationaalisessa koordinaatistossa Greenin-Lagrangen venymäksi

$$\hat{E}_{11} = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{a^2 + y_1^2 - a^2 - b^2}{2 l_0^2} = \frac{y_1^2 - b^2}{2 l_0^2} \; . \tag{2}$$

Lausekkeesta (1) saadaan näin ollen

$$W^{int} = E^{SE} A_0 l_0 \frac{(y_1^2 - b^2)^2}{4 l_0^4} = \frac{E^{SE} A_0}{4 l_0^3} (y_1^2 - b^2)^2 = k (y_1^2 - b^2)^2. \tag{3}$$

Ulkoisen voiman p potentiaali on

$$W^{ext} = p(b + y_1) \tag{4}$$

Koko rakenteen potentiaalienergia saadaan vähentämällä sisäisestä energiasta ulkosen voiman potentiaali

$$W = W^{int} - W^{ext} = k(y_1^2 - b^2)^2 - p(b + y_1). \tag{5}$$

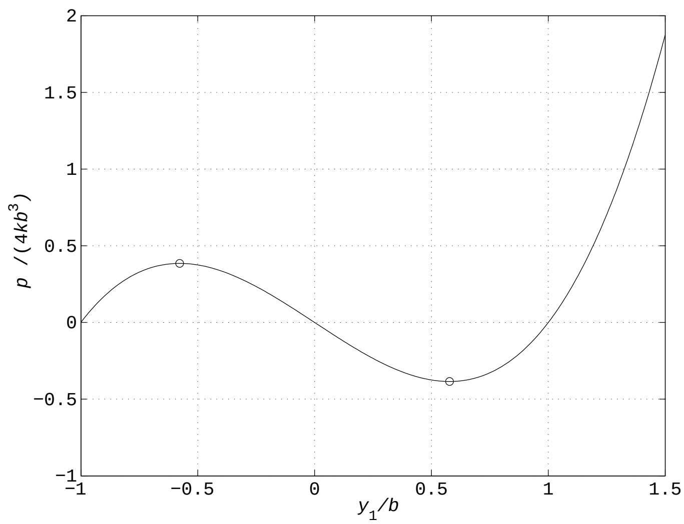
Tasapainoyhtälö saadaan derivoimalla energian lauseketta ja kirjoittamalla tulos nollaksi

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}y_1} = 2k(y_1^2 - b^2) \cdot 2y_1 - p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4k(y_1^3 - b^2 y_1) - p = 0. \tag{6}$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\left(\frac{y_1}{b} \right)^3 - \left(\frac{y_1}{b} \right) = \frac{p}{4kb^3}. \tag{7}$$

Tämä tasapainopolku on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2: Tehtävässä (1) tarkasteltavan tasoristikon voima-siirtymäkäyrä. Tasapainotila on epästabiili välillä $-1/\sqrt{3} < y_1/b < 1/\sqrt{3}$.

Tasapainotilan luonteen tutkimiseksi tarkastellaan energian lausekkeen toisen derivaatan merkkiä. Energian toiseksi derivaataksi saadaan

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}y_1^2} = 4k(3y_1^2 - b^2). \tag{8}$$

Ratkaisu on epästabiili toisen derivaatan ollessa negatiivinen. Tästä saadaan epästabiilisuudelle ehto

$$3y_1^2 - b^2 < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y_1^2}{b^2} < \frac{1}{3}\ , \tag{9}$$

josta edelleen

$$-1/\sqrt{3} < \frac{y_1}{b} < 1/\sqrt{3}\ . \tag{10}$$

Epästabiilisuusvälin rajapisteet on merkitty kuvan (2) tasapainopolkuun ympyröillä.

Teht. 2

Stationäärisyyspisteet saadaan ratkaistua kirjoittamalla potentiaalifunktion

$$W_{PL}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}, \beta) = W(\mathbf{d}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{d}) - \frac{1}{2}\epsilon \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\lambda} \tag{11}$$

osittaiderivaatat muuttujien $\mathbf{d}$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ suhteen nolliksi. Suorittamalla derivointi siirtymien suhteen saadaan matriisimuodossa kirjoitettuna

$$\frac{\partial W_{PL}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G}. \tag{12}$$

Edellä on käytetty määritelmiä (6.3.25): $\partial W/\partial \mathbf{d} = \mathbf{r}$ ja (6.3.39): $\mathbf{G} = [G_{ij}] = [\partial g_i/\partial d_j]$. Suorittamalla derivointi Lagrangen kertojien suhteen saadaan indeksinotaatiota käyttäen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_{PL}}{\partial \lambda_i} &= \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i}(\lambda_j g_j) - \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial}{\partial \lambda_i}(\lambda_j \lambda_j) && (13)\\
&= \delta_{ij} g_j - \frac{1}{2}\epsilon(\delta_{ij}\lambda_j + \lambda_j \delta_{ij}) && (14)\\
&= g_i - \frac{1}{2}\epsilon(\lambda_i + \lambda_i) = g_i - \epsilon\lambda_i, && (15)
\end{aligned}$$

joka matriisimuodossa esitettynä on

$$\frac{\partial W_{PL}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g} - \epsilon \boldsymbol{\lambda}. \tag{16}$$

Kirjoittamalla edellä lasketut osittaisderivaatat nolliksi saadaan stationäärisyysehdot

$$\mathbf{r} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G} = \mathbf{0} \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{g} - \epsilon \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}. \tag{17}$$

Teht. 3

Kirjoittamalla linearisoidun yhtälöryhmän

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} + \lambda_I \mathbf{H}_I & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & -\epsilon \mathbf{I} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d} \\ \boldsymbol{\Delta\lambda} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -(\mathbf{r} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G}) \\ -\mathbf{g} + \epsilon \boldsymbol{\lambda} \end{array} \right\} \tag{18}$$

yhtälöt erillisinä saadaan

$$\left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{A} + \lambda_I \mathbf{H}_I)\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d} + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Delta\lambda} = -\mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G}\ , \\ \mathbf{G}\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d} - \epsilon \mathbf{I}\, \boldsymbol{\Delta\lambda} = -\mathbf{g} + \epsilon \boldsymbol{\lambda}\ . \end{array} \right. \tag{19}$$

Alemmasta saadaan ratkaistua

$$\boldsymbol{\Delta\lambda} = \frac{1}{\epsilon}(\mathbf{g} - \epsilon \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d}) = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{g} - \boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{\epsilon}\mathbf{G}\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d}. \tag{20}$$

Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan

$$(\mathbf{A} + \lambda_I \mathbf{H}_I)\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d} + \frac{1}{\epsilon}\mathbf{G}^T \mathbf{g} - \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{\epsilon}\mathbf{G}^T \mathbf{G}\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d} = -\mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G}, \tag{21}$$

josta edelleen

$$(\mathbf{A} + \lambda_I \mathbf{H}_I + \frac{1}{\epsilon}\mathbf{G}^T \mathbf{G})\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d} = -\mathbf{r} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{G}^T \mathbf{g} + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G}\, . \tag{22}$$

Ottamalla lisäksi huomioon yhteydet

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G} = \mathbf{0} \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{G}^T \mathbf{g} = \mathbf{g}^T \mathbf{G}, \tag{23}$$

päädytään lopulta yhtälöön

$$(\mathbf{A} + \frac{1}{\epsilon}\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda_I \mathbf{H}_I)\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d} = -\mathbf{r} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{g}^T \mathbf{G}\, . \tag{24}$$

Eliminoimalla tästä Lagrangen kertoja käyttäen jälkimmäistä oppikirjan yhtälöistä (6.3.60):

$$\mathbf{g} - \epsilon \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad g_I - \epsilon\, \lambda_I = 0 \tag{25}$$

saadaan

$$(\mathbf{A} + \frac{1}{\epsilon}\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \frac{1}{\epsilon} g_I \mathbf{H}_I)\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d} = -\mathbf{r} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{g}^T \mathbf{G}\, . \tag{26}$$

Korvataan $1/\epsilon$, missä ϵ on mielivaltainen pieni reaaliluku, mielivaltaisella suurella reaaliluvulla β, jolloin saadaan

$$(\mathbf{A} + \beta\, \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \beta\, g_I \mathbf{H}_I)\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{d} = -\mathbf{r} - \beta \mathbf{g}^T \mathbf{G}\, . \tag{27}$$

Todetaan saadun yhtälön olevan identtinen oppikirjassa annetun sakko-menetelmän mukaisen linearisoidun yhtälön (6.3.49) kanssa.

Teht. 4

Kokonais-Lagrangen formulaation mukainen sisäisten voimien materiaalisen aikaderivaatan lauseke on

$$\dot{f}_{iI}^{int} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial N_I}{\partial X_j}(\dot{S}_{jr}F_{ir} + S_{jr}\dot{F}_{ir})\,\mathrm{d}\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{\partial N_I}{\partial X_j}\dot{P}_{ji}\,\mathrm{d}\Omega_0, \tag{28}$$

joka voidaan kirjoittaa

$$\dot{\mathbf{f}}_I^{int} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{0I}^T \dot{\mathbf{P}}\,\mathrm{d}\Omega_0. \tag{29}$$

Ensimmäisen Piolan-Kirchhoffin ja Cauchyn jännityksen materiaalisten aikaderivaattojen välinen yhteys on (6.4.18)

$$\dot{\mathbf{P}} = J\mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T) \tag{30}$$

Valitsemalla nyt referenssitilaksi nykytila, jolloin $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, $\Omega_0 = \Omega$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{B}}$ ja $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ saadaan

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T \tag{31}$$

ja sisäisten voimien materiaaliseksi aikaderivaataksi saadaan

$$\dot{\mathbf{f}}_I^{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\mathcal{B}}_I^T(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T)\,\mathrm{d}\Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{f}_{iI}^{int} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x_k}(\sigma_{ki}^{\nabla\mathcal{T}} + \sigma_{kl}L_{il})\,\mathrm{d}\Omega. \tag{32}$$