Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
9. harjoitus ke 2.4.2003 klo 10-12 U356

1. Johda *Lie*n derivaattojen $\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{dev}}$ ja $\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{hyd}}$ lausekkeet lausuttuna jännityksen $\boldsymbol{\tau}$ materiaalisen aikaderivaatan ja spatiaalisen nopeusgradientin $\mathbf{L}$ avulla.

2. Plastisen dissipaation maksimiperiaate (5.10.72) on
$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \mathbf{D}^p \geq 0\,. \tag{1}$$
Osoita graafisesti, että tällöin myötöpinnan $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ on oltava konveksi ja myötöehdon on oltava assosiatiivinen (myötöehtoon liittyvä) ts. plastinen venymänopeus suuntautuu myötöpinnan ulkonormaalin suuntaan.

3. (a) Johda isotrooppisen elastisuustensorin $\mathbf{C} = K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{I}^{\mathrm{dev}}$ käänteistensori $\mathbf{C}^{-1}$, eli tensori, jolla on ominaisuus $\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C} = \boldsymbol{I}$.
   (b) Osoita isotrooppisen aineen tapauksessa päteväksi yhteys (5.9.23)
$$\left(\mathbf{C}^{-1} + a\hat{\boldsymbol{I}}\right)^{-1} = \mathbf{C} - 2\mu b \hat{\boldsymbol{I}}, \qquad b = \frac{2\mu a}{1 + 2\mu a}\ . \tag{2}$$

4. (a) Isotrooppisen myötölujittumisen tapauksessa on J_2-teorian mukainen plastisen virtauksen suunta
$$\mathbf{r} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}, \qquad \bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}\right)^{1/2}. \tag{3}$$
   Laske tätä tapausta vastaava
$$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\ . \tag{4}$$
   (b) Johda pienten venymien J_2-teorian mukainen algoritmisen modulin lauseke isotrooppisen myötölujittumisen tapauksessa (5.9.41)
$$\mathbf{C}^{\mathrm{alg}} = K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu\beta \boldsymbol{I}^{\mathrm{dev}} - 2\mu\bar{\gamma} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}\,. \tag{5}$$