Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
6. harjoitus ke 12.3.2003 klo 10-12 U356

1. Isotrooppisen hyperelastisen materiaalin elastinen potentiaali voidaan kirjoittaa oikeanpuoleisen Cauchyn-Greenin muodonmuutostensorin $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ pääinvarianttien avulla muodossa

$$\psi = \psi\big(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})\big). \tag{1}$$

Osoita, että tässä tapauksessa saadaan PK2 jännitystensoriksi (5.4.52)

$$\mathbf{S} = 2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\Big)\mathbf{I} - 2\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbf{C} + 2I_3\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\mathbf{C}^{-1}. \tag{2}$$

Edellä on merkitty $I_i = I_i(\mathbf{C})$.

2. Osoita, että tehtävää 1 vastaten Cauchyn jännitystensori voidaan esittää muodossa

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\Big)\mathbf{B} - 2J^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbf{B}^2 + 2J^{-1}I_3\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\mathbf{I}, \tag{3}$$

missä $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ on vasemmanpuoleinen Cauchyn-Greenin muodonmuutostensori ja I_1, I_2 ja I_3 ovat kyseisen tensorin pääinvariantit.

3. Puhtaassa tilavuudenmuutoksessa muodonmuutosgradinetti on muotoa $\mathbf{F} = \alpha\,\mathbf{I}$, missä α on vakio. Laske neo-Hookelaista materiaalimallia käyttäen Cauchyn jännitys tässä tapauksessa ja totea, että saatu jännitys vastaa hydrostaattista jännitystä $\boldsymbol{\sigma} = p\,\mathbf{I}$, jossa paine on

$$p = \frac{\mu}{J}(J^{2/3} - 1) + \frac{\lambda}{J}\ln J. \tag{4}$$

4. Olkoon PK2 jännitystensorin ja Greenin-Lagrangen venymätensorin nopeuksien välinen yhteys

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{SE} : \dot{\mathbf{E}}\,. \tag{5}$$

Johda vastaava spatiaalinen muoto

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} = \mathbf{C}^{\sigma\mathcal{T}} : \mathbf{D}\,, \tag{6}$$

missä $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}}$ on Cauchyn jännityksen Truesdellin aikaderivaatta ja $\mathbf{D}$ on venymänopeustensori.