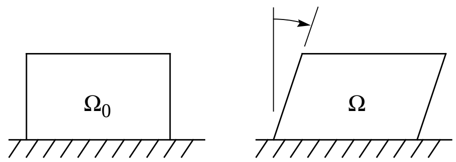
Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
5. harjoitus ke 6.3.2003 klo 10-12 U356

1. Tarkastellaan kuvan (1) mukaista leikkausmuodonmuutosta, jossa liike on muotoa

$$x = X + Yt, \qquad y = Y. \tag{1}$$

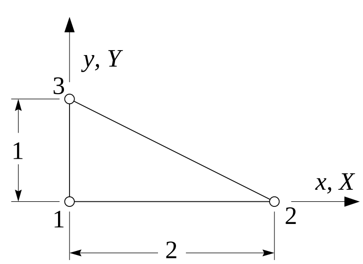
Laske Greenin-Lagrangen venymätensori ajan funktiona. Piirrä E_{12} ja E_{22} arvoilla $t \in [0, 4]$. Selitä miksi E_{22} on nollasta poikkeva. Laske Piolan-Kirchhoffin 2. jännitys Kirchhoffin materiaalille käyttäen oppikirjan (5.4.59) mukaista yhteyttä $[C^{SE}]$. (Kyseinen matriisi on $[C^{\tau}]$ mutta käytä sitä tästä huolimatta.)



Kuva 1: Suorakulmaisen elementin leikkausmuodonmuutos.

2. Tarkastellaan jälleen kierroksella 3 esillä ollutta kuvan (2) mukaista elementtiä, jonka liikkeeksi oli annettu

$$x = X + Yt, \qquad y = Y + \frac{1}{2}Xt. \tag{2}$$



Kuva 2: Tehtävässä (2) tarkasteltava kolmisolmuinen tasoelementti hetkellä $t = 0$.

(a) Laske muodonmuutosgradientti hetkellä $t = 1$ käyttäen alku- ja nykytilan solmukoordinaatteja sekä elementin muotofunktioita ja totea päätyväsi samaan tulokseen kuin suoraan annettua liikettä derivoimalla.

(b) Olkoon ainoa nollasta poikkeava PK2 jännityskomponentti deformoituneessa tilassa S_{11}. Laske elementin sisäiset voimat hetkellä $t = 1$.

3. Elementtimenetelmän yhtälöiden formuloinnissa käytetyn referenssikonfiguraation valinnan joustavuuden havainnollistamiseksi tarkastellaan tensorisuuretta $\mathbf{P}_\xi = J_\xi \mathbf{F}_\xi^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, joka voidaan tulkita nimellisjännitystensoriksi kantaelementtialueessa. Osoita, että tasapainoyhtälö ja reunaehto voidaan tilavuusvoimien ollessa nollia kirjoittaa

$$\nabla_\xi \cdot \mathbf{P}_\xi = 0 \quad \text{alueessa} \cup \Delta_e \text{ , (kantaelementtialueiden yhdiste)} \tag{3}$$

$$\mathbf{n}_{0\xi} \cdot \mathbf{P}_\xi = \mathbf{t}_\xi \quad \text{reunalla } \Gamma_t \text{ .} \tag{4}$$

Johda vastaava heikko muoto ja käyttäen kantaelementin muotofunktioita $N_I(\boldsymbol{\xi})$ osoita, että elementin sisäisten voimien vektori voidaan kirjoittaa suoraan kantaelementtialueessa muodossa

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega_\xi} (P_\xi)_{ji} \frac{\partial N_I}{\partial \xi_j} \, \mathrm{d}\Omega_\xi. \tag{5}$$

4. Tarkastellaan kantaelementin pinnalla $\zeta = -1$ vaikuttava paineen p aiheuttamia ulkoisia solmuvoimia. Paine aiheuttaa pinnalle kuormituksen $\mathbf{t} = -p\,\mathbf{n}$, missä $\mathbf{n}$ on tarkasteltavan pinnan yksikkönormaali.

   (a) Käyttäen apuna *Nanson*in kaavaa osoita, että ulkoiset solmuvoimat saadaan lausekkeesta

   $$\mathbf{f}_I^{ext} = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} p N_I J_\xi \mathbf{F}_\xi^{-T} \cdot \mathbf{n}_{0\xi} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta, \tag{6}$$

   missä $\mathbf{n}_{0\xi} = -\mathbf{e}_3$ on kantaelementin tason $\zeta = -1$ normaali.

   (b) Käyttäen Cramerin säännön avulla lausuttua käänteistensoria

   $$\mathbf{F}_\xi^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{F}_\xi)} [\mathbf{F}_\xi^*] \tag{7}$$

   missä $[\mathbf{F}_\xi^*]$ on co-factor matriisin transpoosi, osoita että ulkoisten solmuvoimien lauseke saadaan oppikirjan lausekkeen (E4.3.16) mukaiseen muotoon.