Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
4. harjoitus ke 26.2.2003 klo 10-12 U356

1. Johda Jacobin determinantin materiaalisen aikaderivaatan lauseke (3.2.25)

$$\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v}. \tag{1}$$

2. Lähde liikkeelle kulmaliikemäärän säilymislaista (3.5.39)

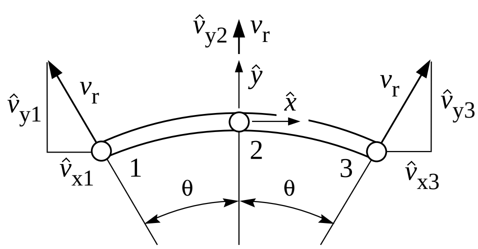
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \, \mathbf{v} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \, \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, \mathrm{d}\Gamma \tag{2}$$

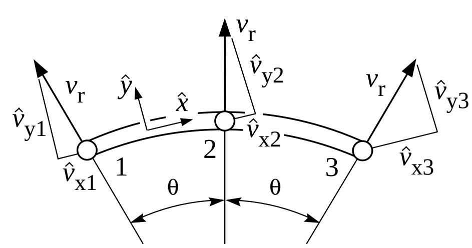
ja osoita, että tästä seuraa Cauchyn jännitystensorin symmetria $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

3. Tarkastellaan kuvan 1 mukaista kolmisolmuista sauvaelementtiä, jonka solmukoordinaatit ovat

$$x_1 = -r \sin\theta, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = r \sin\theta, \qquad y_1 = 0, \quad y_2 = r\,(1 - \cos\theta), \quad y_3 = 0. \tag{3}$$

Nopeus elementin jokaisessa solmussa on säteen suuntainen v_r. Laske korotationaalinen muodonmuutosnopeus $\hat{D}_x$ solmussa 2 lausuttuna solmunopeuksien avulla ja vertaa tulosta sylinterikoordinaatistossa lausuttuun muodonmuutosnopeuteen $D_{\theta\theta} = v_r/r$. Solmussa 2 ovat korotationaalisen koordinaatiston akselit globaalikoordinaatiston akselien suuntaiset. Toista lasku tapauksessa, jossa korotationaalinen koordinaatisto on kiinnitetty Gaussin pisteeseen $\xi = -1/\sqrt{3}$ käyttäen arvoja $\theta = 0.1$ ja $\theta = 0.05$. Käytä tavanomaisia kolmisolmuisen elementin muotofunktioita (E2.5.2).





Kuva 1: Tehtävässä (3) tarkasteltava kolmisolmuinen sauvaelementti ja korotationaalinen koordinaatisto solmussa 2 (vasemmalla) ja Gaussin pisteessä (oikealla).

4. (a) Käyttäen hyväksi harjoituksen 3 tehtävässä 4 johdettuja tuloksia sekä tensorin pääinvarianttien lausekkeita (Oppikirja, Box 5.2) osoita, että pääinvarianttien materiaaliset aikaderivaatat voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} : \mathbf{I}, & (4) \\ \dot{I}_2 &= (\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) - (\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{I} = (\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} : \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) - (\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{I}, & (5) \\ \dot{I}_3 &= I_3 \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1}) = I_3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1}). & (6) \end{aligned}$$

(b) Osoita, että Cauchyn jänityksen materiaalisen aikaderivaatan ollessa deviatorinen on jännityksen Jaumannin aikaderivaatta myös deviatorinen.