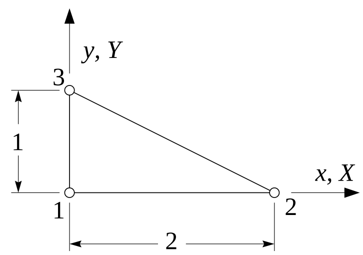
Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
3. harjoitus ke 19.2.2003 klo 10-12 U356

1. Tarkastellaan kuvan (1) mukaista elementtiä. Olkoon liike $x = X + Yt,\ y = Y + \frac{1}{2}Xt$.



Kuva 1: Tehtävässä (1) tarkasteltava kolmisolmuinen tasoelementti hetkellä $t = 0$.

   (a) Piirrä elementti hetkellä $t = 1$ ja laske muodonmuutosgradientti $\mathbf{F}$ sekä *Green*in-*Lagrange*n venymätensori $\mathbf{E}$ kyseisellä ajanhetkellä.
   (b) Laske polaarihajotelmaa käyttäen kiertymätensori $\mathbf{R}$ ja venymistensori $\mathbf{U}$ hetkellä $t = 1$.
   (c) Laske nopeus $\mathbf{v}$, kiihtyvyys $\mathbf{a}$ ja venymänopeus $\mathbf{D}$ hetekellä $t = 1$.
   (d) Muodosta Jacobin determinantin lauseke ajan funktiona ja selvitä kuinka pitkään se pysyy positiivisena. Piirrä elementti hetkellä, jolloin J vaihtaa merkkiään.

2. Käyttäen *Nanson*in kaavaa ($\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma = J\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}\mathrm{d}\Gamma_0$) (3.4.5) osoita, että pinta-integraalin materiaalinen aikaderivaatta voidaan kirjoittaa (Sec.3.8, 4)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S g\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_S \left((\dot{g} + g\,\mathrm{div}\mathbf{v})\mathbf{I} - g\,\mathbf{L}^T\right)\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{1}$$

3. Lähtien liikkelle oppikirjan yhtälöistä (3.3.4) ja (3.3.12)

$$\mathrm{d}\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I} - 2\mathbf{E}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} = 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{d}s^2) = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}\ \forall\ \mathrm{d}\mathbf{x}$$

   osoita, että

$$2\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = 2\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{2}$$

   ja näin ollen on voimassa yhteys

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \tag{3}$$

4. (a) Osoita, että millä tahansa toisen kertaluvun tensoreilla $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$, on *Jaumann*in aikaderivaatalla ominaisuus

$$(\mathbf{A} : \mathbf{B})^{\cdot} = \dot{\mathbf{A}} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{\nabla J} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \mathbf{B}^{\nabla J}. \tag{4}$$

   (b) Osoita, että tensoreiden $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ollessa symmetrisiä ja toteuttaessa lisäksi ehdon $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ pätevät myös yhteydet

$$\mathbf{A} : \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{A} : \mathbf{B}^{\nabla J} \qquad \text{ja} \qquad \dot{\mathbf{A}} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^{\nabla J} : \mathbf{B}. \tag{5}$$

   (c) Osoita, että kohtien (a) ja (b) tulokset pätevät kaikille spin pohjaisille nopeuksille, eli

$$\mathbf{A}^{\nabla} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{\Omega}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{\Omega}^T. \tag{6}$$