Teknillinen korkeakoulu
Mat-5.187 Epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet (Mikkola/Ärölä)
1. harjoitus ke 5.2.2003 klo 10-12 U356

Tehtävän perässä suluissa olevat tiedot viittaavat oppikirjaan.

1. Muunna virtuaalisen työn periaate virtuaalisen tehon periaatteeksi asettamalla $\delta u = \delta v$ ja käyttämällä hyväksi massan säilymisyhtälöä sekä jännitysten σ ja P välistä yhteyttä. (Huomaa, että tämä on sallittua, sillä kelpoisuusehdot yrite- ja testifunktioille ovat samat sekä siirtymiä että nopeuksia käytettäessä.)(Sec.2.14, 1)

2. Tarkastellaan kaksisolmuista lineaarista siirtymäelementtiä, jonka poikkipinta-ala on muotoa $A_0 = A_{01}(1-\xi) + A_{02}\xi$, missä A_{01} ja A_{02} ovat alkutilan poikkipinta-alat solmuissa 1 ja 2. Olkoon nimellisjännitys P elementissä myös lineaarinen, eli $P = P_1(1-\xi) + P_2\xi$, missä P_1 ja P_2 ovat solmujännitykset. (Sec.2.14, 2)

   (a) Laske elementin sisäiset voimat $\mathbf{f}^{int}$ ja vakiotilavuusvoiman aiheuttamat ulkoiset solmuvoimat $\mathbf{f}^{ext}$ käyttäen Lagrangen formulaatiota. Vertaa tuloksia tapauksessa $A_{01} = A_{02} = A_0$ ja $P_1 = P_2$ oppikirjan esimerkin 2.1 tuloksiin.

   (b) Muodosta elementin konsistentti massamatriisi. Diagonalisoi massamatriisi käyttäen *row-sum*-tekniikkaa. Laske elementin ominaistaajuudet ω sekä konsistenttia että diagonalisoitua massamatriisia käyttäen ratkaisemalla ominaisarvotehtävä

$$\mathbf{K}\mathbf{y} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{y} \qquad \text{missä} \quad \mathbf{K} = \frac{E^{PF}(A_{01}+A_{02})}{2l_0}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Tarkastellaan kahdesta peräkkäin asetetusta pituudeltaan l ja poikkipinta-alaltaan A olevasta kaksisolmuisesta elementistä koostuvaa mallia. Muodosta mallin konsistentti massamatriisi ja jäykkyysmatriisi ja laske vapaiden värähtelyjen ominaistajuus. Taajuusanalyysissä oletetaan lineaarinen vaste, joten alku- ja nykytilan geometriat ovat samat. Laske tehtävä myös käyttäen "lumpattua"(*lumped*) massamatriisia. Vertaa saamiasi tuloksia vapaan sauvan ominaistaajuuksien tarkkaan ratkaisuun:

$$\omega = n\frac{\pi c}{L} \quad \text{, missä} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

   Totea konsistenttia massamatriisia käyttäen saatujen taajuuksien olevan suurempia ja diagonalisoitua massamatriisia käyttäen saatujen pienempiä kuin tarkka ratkaisu. (Sec.2.14, 4)

4. Pallosymmetrisessä tapauksessa muodonmuutos ja jännitykset ovat vain säteen funktioita. Ainoa nollasta poikkeava nopeuskomponentti on v_r ja

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} D_{rr} \\ D_{\theta\theta} \\ D_{\phi\phi} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{\phi\phi} \end{Bmatrix}, \quad D_{rr} = v_{r,r}, \quad D_{\theta\theta} = D_{\phi\phi} = \frac{1}{r}v_r.$$

   Muodosta virtuaalisen tehon lauseke ja johda vastaava vahva muoto. Muodosta kaksisolmuiselle lineaarisen nopeuskentän elementille matriisi $\mathbf{B}$, sisäisten voimien $\mathbf{f}_e^{int}$ lauseke jännitysten avulla, ulkoisten voimien $\mathbf{f}_e^{ext}$ lauseke ja konsistentti massamatriisi $\mathbf{M}_e$. (Sec.2.14, 6)