MS-C1420 Fourier-analyysi osa II

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

14. helmikuuta 2014

Fourier-kertoimien numeerinen laskeminen

Jos 1-jaksollisesta signaalista s on saatu havainnot $\mathbf{q}(j) = s\left(\frac{j}{N}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ ja halutaan laskea Fourie-kertoimien $\hat{s}(k)$ approksimaatioita niin voidaan menetellä seuraavalla tavalla: Muodostetaan ensin s:n korvikkeena funktio

$$g(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{q}(j) p_N\left(t - \frac{j}{N}\right),$$

missä $p_N(t+1) = p_N(t)$ ja

$$p_N(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t = \frac{k}{N}, k = 1, 2, \ldots, N-1, \end{cases}$$

jolloin siis $g\left(\frac{j}{N}\right) = \mathbf{q}(j) = s\left(\frac{j}{N}\right)$ kaikilla j. Tämän funktion Fourier-kertoimet ovat

$$\hat{g}(k) = \hat{\mathbf{q}}(k)\widehat{p_N}(k).$$

Miksi?

Funktion g Fourier-kertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned}
\hat{g}(k) &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{q}(j) p_N\left(t - \tfrac{j}{N}\right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{N}} \mathbf{q}(j) \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k(t-\frac{j}{N})} p_N\left(t - \tfrac{j}{N}\right) \mathrm{d}t = \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{N}} \mathbf{q}(j) \int_{-\frac{j}{N}}^{1-\frac{j}{N}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} p_N(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{N}} \mathbf{q}(j) \widehat{p_N}(k) = \hat{\mathbf{q}}(k)\widehat{p_N}(k).
\end{aligned}$$

Jaksollistetut funktiot

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ *ja siitä tehdään jaksollien funktio* s_J *kaavalla*

$$s_J(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} s(t-j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} s(t+j)$$

niin $s_J \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja*

$$\widehat{s_J}(k) = \hat{s}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tämä ei välttämättä onnistu jos ainoastaan oletetaan, että $s \in L^2(\mathbb{R})$.

Miksi

Koska $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kj} = 1$, $k, j \in \mathbb{Z}$ *niin muuttujan vaihdolla* $t = \tau + j$ *saadaan*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_j^{j+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k(\tau+j)} s(t+j)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\tau} s(t+j)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\tau} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} s(t+j) \right) \mathrm{d}\tau.$$

Esimerkki jaksollistamisesta

Jos $N > 1$ *ja* $p \in L^1(\mathbb{R})$ *on sellainen, että* $p(0) = 1$, $p(j) = 0$ *kaikilla* $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *ja*

$$p_N(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(N(t-j))$$

niin silloin $p_N(t+1) = p_N(t)$, $p_N(t) = 1$ *kun* $t = 0$ *ja* $p_N(t) = 0$ *kun* $t = \frac{k}{N}$ *ja* $k = 1, 2, \ldots, N-1$. *Lisäksi pätee*

$$\widehat{p_N}(k) = \frac{1}{N}\hat{p}\left(\frac{k}{N}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Poissonin summakaava

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$, *s on jatkuva kokonaislukupisteissä ja jono* $\sum_{j=-N}^{N} s(t+j)$ *suppenee tasaisesti kun* $t \in (-\delta, \delta)$ *kun* $N \to \infty$ *missä* $\delta > 0$ *niin* $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} s(k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{N-|k|}{N} \hat{s}(k)$ *ja jos esim.* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |s(k)| < \infty$ *ja* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{s}(k)| < \infty$ *niin pätee*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k).$$

Huom!

Soveltamalla tätä tulosta tyyppiä $t \mapsto s(t-x)$, $t \mapsto e^{i2\pi xt} s(t)$ *ja* $t \mapsto s(at)$ *oleviin funktioihin ja niiden kombinaatioihin saadaan lisää kaavoja.*

Miksi Poissonin summakaava on voimassa

Kyse on oleellisesti siitä missä mielessä, jos lainkaan, käänteiskaava $s_J(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi k\cdot t} \widehat{s_J}(k)$ *pätee kun* $t = 0$.
Olkoon $g(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=-N}^{N} s(t+j)$ *jolloin* $g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja* $\hat{g}(k) = \hat{s}(k)$. *Oletuksesta, että jono* $\sum_{j=-N}^{N} s(t+j)$ *suppenee tasaisesti kun* $t \in (0, \delta)$ *seuraa, että g on jatkuva pisteessä* 0. *Silloin pätee*

$$\lim_{N\to\infty} (F_N * g)(0) = g(0)$$

missä $F_N = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2$ *ja koska toisaalta*

$$(F_N * g)(0) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{N-|k|}{N} e^{i2\pi k\cdot 0} \hat{g}(k) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{N-|k|}{N} \hat{s}(k)$$

niin saadaan väite g:n määritelmästä. Jos $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |s(k)| < \infty$ *ja* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{s}(k)| < \infty$ *rajat-arvot voidaan ottaa ja saadaan väite* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)$.

Whittaker-Shannonin interpolointikaava

Jos $s \in L^2(\mathbb{R})$ *ja* $\hat{s}(\nu) = 0$ *kun* $|\nu| > \frac{1}{2}$ *niin*

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) \mathrm{sinc}\,(t-k) \quad t \in \mathbb{R},$$

missä $\mathrm{sinc}\,(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ *jos* $t \neq 0$ *ja* 1 *jos* $t = 0$.

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ *ja* $\hat{s}(\nu) = 0$ *kun* $|\nu| > \frac{1}{2}$ *niin* $s \in L^2(\mathbb{R})$ *ja oletuksesta* $s \in L^2(\mathbb{R})$ *seuraa, että* $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |s(k)\mathrm{sinc}\,(t-k)| < \infty$ *kaikilla* $t \in \mathbb{R}$.

Vaimennetut distribuutiot

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{\, h : h \text{ on jatkuva ja lineaarinen funktio: } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \,\}.$$

Jatkuvuus?

Funktio $h : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *on jatkuva jos* $\lim_{n\to\infty} h(\psi_n) = h(\psi)$ *kun* $\psi_n, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *ja* $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ *eli* $\lim_{n\to\infty} d(\psi_n, \psi) = 0$ *missä*

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(k+m)} \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k(\varphi^{(m)}(t) - \psi^{(m)}(t))|}{1 + \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k(\varphi^{(m)}(t) - \psi^{(m)}(t))|}.$$

Näin ollen funktio $h : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *on jatkuva jos jokaisella* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *ja jokaisella* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $\delta > 0$ *siten että jos* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *ja* $d(\varphi, \psi) < \delta$ *niin* $|h(\varphi) - h(\psi)| < \epsilon$.

Vaimennetun distribuution Fourier-muunnos

Jos $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *niin* $\hat{h} = \mathcal{F}(h)$ *on vaimennettu distribuutio*

$$\hat{h}(\psi) = h(\hat{\psi}).$$

Huom!

Jotta voidaan osoittaa, että $\hat{h} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *jos* $h \in \mathcal{S}'(R)$ *pitää ensin osoittaa että Fourier-muunnos on jatkuva:* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *(Lineaarisuus on melkein itsestään selvä asia.)*

Esimerkki

Jos $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *on mitallinen ja on olemassa* $m \geq 0$ *siten, että* $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|(1+|t|)^{-m}\,\mathrm{d}t < \infty$ *niin voidaan määritellä vaimennettu distribuutio* $s_{\to D}$ *(tai pelkästään* s*) kaavalla*

$$s_{\to D}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jos $s_{\to D}(\psi) = 0$ *kun* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *eli* $s_{\to D} = 0$, *niin* $s(t) = 0$ *melkein kaikilla* t.

Diracin δ-funktio

Voidaan määritellä vaimennettu distribuutio δ_T *seuraavasti:*

$$\delta_T(\psi) = \psi(T).$$

Jos $p \in L^1(\mathbb{R})$ *on sellainen, että* $\int_{\mathbb{R}} p(t)\,\mathrm{d}t = 1$, *esim.* $p(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$, *ja merkitään* $p_a(t) = ap(at)$ *niin*

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\mathbb{R}} p_a(t-T)\psi(t)\,\mathrm{d}t = \psi(T),$$

joten δ_T *on funktioiden* $p_a(t-T)$ *raja-arvo distribuutiomielessä. Distribuution* δ_T *Fourier-muunnos* $\widehat{\delta_T}$ *on määritelmän mukaan distribuutio jonka arvo testifunktiolla* ψ *on*

$$\widehat{\delta_T}(\psi) = \delta_T(\hat{\psi}) = \hat{\psi}(T) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi T\nu}\psi(\nu)\,\mathrm{d}\nu,$$

eli funktion $t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi T\nu}$ *generoima distribuutio.*

Diracin δ-funktio, jatk.

Funktion $p_a(t-T)$ Fourier-muunnos on

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} a p(a(t-T))\,\mathrm{d}t \overset{a(t-T)=\tau}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\nu}{a}\tau} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi T\nu} p(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi T\nu} \hat{p}\left(\frac{\nu}{a}\right),$$

koska $\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\mathrm{d}\tau$ *ja* $t = \frac{\tau}{a} + T$. *Kun* $a \to \infty$ *saadaan raja-arvona funktio* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi T\nu}$ *koska* $\lim_{a\to\infty} \hat{p}\left(\frac{\nu}{a}\right) = \hat{p}(0) = \int_{\mathbb{R}} p(t)\,\mathrm{d}t = 1$ *oletuksen mukaan, jolloin taas nähdään että* δ_T*:n Fourier-muunnos on funktio* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi T\nu}$ *(tai tämän funktion generoima distribuutio).*

Vaimennetun distribuution Fourier-muunnos on järkevästi määritelty!

Jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ *tai* $s \in L^2(\mathbb{R})$ *niin*

$$\widehat{s_{\to D}} = (\hat{s})_{\to D} \quad \textit{eli} \quad \mathcal{F}(s_{\to D}) = \mathcal{F}(s)_{\to D}.$$

Miksi?

Jos esim. $s \in L^1(\mathbb{R})$ *niin määritelmän mukaan*

$$\mathcal{F}(s_{\to D})(\psi) = s_{\to D}(\hat{\psi}) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\hat{\psi}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Koska sekä s *että* $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ *niin kertolaksukaavan nojalla, joka pätee myös kuin kuin molemmat funktiot ovat neliöintegroituvia,*

$$\int_{\mathbb{R}} s(t)\hat{\psi}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = (\hat{s})_{\to D}(\psi),$$

ja koska $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *oli mielivaltainen, niin väite seuraa.*

Vaimennetun distribuution derivaatta

Jos $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ niin sen derivaatta h' määritellään kaavalla

$$h'(\varphi) = -h(\varphi').$$

Kun todistetaann, että h' on vaimennettu on ensin osoitettava, että derivointi on jatkuva funktio: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Miksi näin?

Jos s on derivoituva funktio ja on olemassa $m \geq 0$ siten, että $\int_{\mathbb{R}}(|s(t)| + |s'(t)|)(1 + |t|)^{-m}\,\mathrm{d}t$ niin $s_{\to D}$ ja $(s')_{\to D}$ ovat vaimennettuja distribuutioita ja pätee

$$\begin{aligned}(s_{\to D})'(\psi) = -s_{\to D}(\psi') &= -\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\!\!\!\!\!\!\!\!\!\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} s'(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = (s')_{\to D}(\psi).\end{aligned}$$

Operaatioita vaimennetuilla distribuutioilla

Kun s on funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ voimme määritellä seuraavat operaatiot:

$$\begin{aligned}(T_x s)(t) &= s(t - x), \\ (M_x s)(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi xt} s(t), \\ (C_x s)(t) &= s(xt) \quad (\textit{missä } x \neq 0)\end{aligned}$$

ja ehdosta $L_x s_{\to D} = (L_x s)_{\to D}$ missä $L = T$, M tai S, niin saadaan seuraavat määritelmät vaimennetuille distribuutioille:

$$\begin{aligned}(T_x h)(\psi) &= h(T_{-x}\psi), \\ (M_x h)(\psi) &= h(M_x \psi), \\ (C_x h)(\psi) &= h\left(\tfrac{1}{|x|} C_{\frac{1}{x}} \psi\right).\end{aligned}$$

Lisäksi jos $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ja $\sup_{t \in \mathbb{R}}(1 + |t|)^{-k(m)} |\varphi^{(m)}(t)| < \infty$ kaikilla m jollain $k(m)$ niin määritellään funktion φ ja vaimennetun distribuution h tulo kaavalla

$$(\varphi h)(\psi) = h(\varphi\psi).$$

Fourier-muunnos ja derivaatta

Jos $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *niin*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h)' &= \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi t)h),\\ \mathcal{F}(h') &= (\mathrm{i}2\pi t)\mathcal{F}(h).\end{aligned}$$

Miksi ?

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h)'(\psi) &= -\mathcal{F}(h)(\psi') = -h(\mathcal{F}(\psi'))\\ &= -h((\mathrm{i}2\pi t)\mathcal{F}(\psi)) = ((-\mathrm{i}2\pi t)h)(\mathcal{F}(\psi)) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi t)h)(\psi),\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h')(\psi) &= h'(\mathcal{F}(\psi)) = -h(\mathcal{F}(\psi)')\\ &= -h(\mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi t)\psi) = \mathcal{F}(h)((\mathrm{i}2\pi t)\psi) = ((\mathrm{i}2\pi t)\mathcal{F}(h))(\psi).\end{aligned}$$

Jaksollisen funktion Fourier-muunnos

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *niin* s *määrittelee myös funktion:* $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *siten, että* $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|(1+|t|)^{-2}\,\mathrm{d}t < \infty$ *ja silloin*

$$\widehat{s_{\to D}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)\delta_k,$$

missä $\hat{s}(k)$ *on* s*:n Fourier-kerroin ja* $\delta_\tau(\psi) = \psi(\tau)$.

Jaksollisen funktion Fourier-muunnos

Määritelmän mukaan

$$\widehat{s_{\to D}}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\hat{\psi}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Koska $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$ *niin funktio* $\varphi(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(-t+j)$ *on jaksollinen ja äärettömän monta kertaa derivoituva. Näin ollen se voidaan kirjoittaa Fourier-summana*

$$\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}\hat{\varphi}(k).$$

Koska s *on jaksollinen niin*

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\hat{\psi}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{j}^{j+1} s(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 s(t)\varphi(-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(m) \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k)\hat{s}(k),$$

Jaksollisen funktion Fourier-muunnos, jatk.

missä $\hat{s}$ *tarkoittaa jaksollisen funktion Fourier-muunnos. Toisaalta*

$$\hat{\varphi}(k) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} \sum_{j\in Z} \hat{\psi}(-t+j)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}\hat{\psi}(-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}\hat{\psi}(t)\,\mathrm{d}t = \psi(k).$$

Näin ollen

$$\widehat{s_{\to D}}(\psi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)\psi(k),$$

eli

$$\widehat{s_{\to D}} = \sum_{k\in Z} \hat{s}(k)\delta_k.$$

Aliasoituminen I

Olkoon s jatkuva-aikainen signaali jonka Fourier-muunnos $\hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ jolloin s on ainakin jatkuva funktio siten, että $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$. Jos nyt otetaan näytteitä $s(k\Delta t)$, $k \in \mathbb{Z}$, tästä signaalista niin Fourier-muunnoksen käänteiskaavan nojalla ne voidaan esittää Fourier-muunnoksen $\hat{s}$ avulla seuraavasti:

$$s(k\Delta t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi k\Delta t\nu} \hat{s}(\nu)\, d\nu.$$

Mutta funktio $\nu \to e^{i2\pi k\Delta t\nu}$ on jaksollinen jaksolla $\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t}$ joten jos nyt määritellään $\hat{s}_{J,\Delta\nu}(\nu) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{s}(\nu - j\Delta\nu)$ niin

$$s(k\Delta t) = \int_0^{\Delta\nu} e^{i2\pi k\Delta t\nu} \hat{s}_{J,\Delta\nu}(\nu) d\nu = \int_{-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\frac{\Delta\nu}{2}} e^{i2\pi k\Delta t\nu} \hat{s}_{J,\Delta\nu}(\nu) d\nu.$$

Näin funktio $\hat{s}_{J,\Delta\nu}(\nu)$ määrittää jonon $s(k\Delta t)$ ja päinvastoin eikä jälkimmäisen jonon avulla ole mahdollista sanoa luvuista $\hat{s}(\nu - j\Delta\nu)$ muuta kuin niiden summa.

Aliasoituminen I, jatk.

Toisaalta jos $\hat{s}$ on nolla tietyn $\Delta\nu$-pituisen välin ulkopuolella, niin silloin on mahdollista rekonstruida signaali lukujen $s(k\Delta t)$ avulla Whittaker-Shannonin interpolointikaavan (modifikaation) avulla.

Aliasoituminen II

Tarkastellaan seuraavaksi mahdollisimman yksinkertainen signaali eli $s(t) = e^{i2\pi\nu t}$ jonka taajuus on ν ja poikkeuksena edelliseen tapaukseen otetaan nyt vain N näytettä $\mathbf{q}(k) = s(t_0 + k\Delta t)$, $k = 0, \dots N-1$. Nämä näytteet määräytyvät yksikäsitteisesti tämän jonon diskreetistä Fourier-muunnoksesta

$$\hat{\mathbf{q}}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi\frac{mk}{N}} s(t_0 + k\Delta t) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi\frac{mk}{N}} e^{i2\pi\nu(t_0+k\Delta t)}$$
$$= e^{-i2\pi\nu t_0} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k(\nu\Delta t - \frac{m}{N})}.$$

Aliasoituminen II, jatk.

Funktion $e^{i2\pi t}$ *jaksollisuudesta ja geometrisen sarjan summakaavasta seuraa, että*

$$\hat{\mathbf{q}}(m) = \begin{cases} N e^{i2\pi\nu t_0}, & \text{jos } e^{i2\pi(\text{mod}\,(\nu\Delta t,1)-\frac{m}{N})} = 1, \\ e^{i2\pi\nu t_0}\dfrac{1-e^{i2\pi(N\text{mod}\,(\nu\Delta t,1)-m)}}{1-e^{i2\pi(\text{mod}\,(\nu\Delta t,1)-\frac{m}{N})}}, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Näin ollen ainoa tieto taajuudesta joka saadaan diskreetistä Fourier-muunnoksesta ja siten myös jonosta $s(t_0 + k\Delta t)$ *on* $\text{mod}\,(\nu\Delta t, 1)$ *ja se näkyy siten, että diskreetti Fourier-muunnos saa itseisarvoltaan suurimmat arvonsa kun* $\frac{m}{N} \approx \text{mod}\,(\nu\Delta t, 1)$.
Muista myös, että jokainen vaimennettu distribuutio on trigonometristen polynomien raja-arvo (tosin aika heikossa mielessä), ja yllä oleva lasku on myös sovellettavissa niihin.

"Aikataajuudessa rajoitettu signaali on 0"

Ainoa funktio $s \in L^1(\mathbb{R})$ *jolle on olemassa* $M < \infty$ *siten, että* $s(t) = 0$ *kun* $|t| \geq M$ *ja* $\hat{s}(\nu) = 0$ *kun* $|\nu| \geq M$ *on* $s = 0$.

"Aikataajuudessa rajoitettu signaali on 0"

Olkoon s tällainen funktio. Määritellään sen avulla funktio $q(t) = s(4Mt + M)$ *jolloin nähdään, että* $q(t) = 0$ *kun kun* $t \leq -\frac{1}{2}$ *ja kun* $t \geq 0$. *Seuraavaksi muodostetaan tämän funktion jaksollistus* $q_J(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} q(t-j)$ *jolle siis pätee, että* $q_J(t) = 0$ *kun* $t \in [0, \frac{1}{2}]$. *Koska* $\hat{q}(\nu) = e^{i2\pi\frac{\nu}{4}}\hat{s}(\frac{\nu}{4M})$ *niin* $\hat{q}(\nu) = 0$ *kun* $|\nu| \geq 4M^2$. *Erityisesti tämä tarkoittaa sitä, että* q_J*:llä on ainoastaan äärellisen monta nollasta poikkeavaa Fourier-kerrointa koska* $\widehat{q_J}(k) = \hat{q}(k)$. *Näin ollen q voidaan esittää Fourier-summana*

$$q(t) = \sum_{k=-m}^{m} e^{i2\pi kt}\hat{q}(k),$$

ja voimme olettaa, että $|\hat{q}(-m)| + |\hat{q}(m)| > 0$ *jos* $s \neq 0$ *jolloin* $q \neq 0$.

"Aikataajuudessa rajoitettu signaali on 0", jatk.

Koska Fourier-summa sisältää vain äärellisen monta termiä niin q on äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva ja koska $q(t) = 0$ kun $0 < t < \frac{1}{2}$ niin myös kaikki sen derivaatat ovat 0 tällä välillä ja jatkuvuuden nojalla myös pisteessä $t = 0$ eli

$$0 = \frac{q^{(j)}(0)}{(i2\pi m)^j} = \sum_{k=-m}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^j \hat{q}(k).$$

Nyt pätee $\lim_{j\to\infty} \sum_{k=-m+1}^{m-1} \left(\frac{k}{m}\right)^j \hat{q}(k)e^{i2\pi kt} = 0$ *joten saadaan*

$$lim_{j\to\infty}((-1)^j\hat{q}(-m) + \hat{q}(m)) = 0,$$

josta seuraa, että $\hat{q}(-m) = \hat{q}(m) = 0$ ja $s = 0$.

Ikkunoitu Fourier-muunnos

Jos s signaali ja w on "ikkuna"-funktio niin s:n w-ikkunoitu Fourier-muunnos on

$$F(s,w)(\tau,\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} s(t)\overline{w(t-\tau)}\,dt.$$

eli $F(s,w)(\tau,\nu) = \mathcal{F}(s\overline{T_\tau w})(\nu)$ ja oletetaan, että w on valittu siten, että signaalin $s(t)\overline{T_\tau w}(t)$ Fourier-muunnos on hyvin määritelty. (Useimmiten ikkunafunktio w reaalinen, esim $w(t) = e^{-\beta t^2}$ jolloin kompleksikonjugoinnilla ei ole merkitystä.)

Miksi ikkunointia?

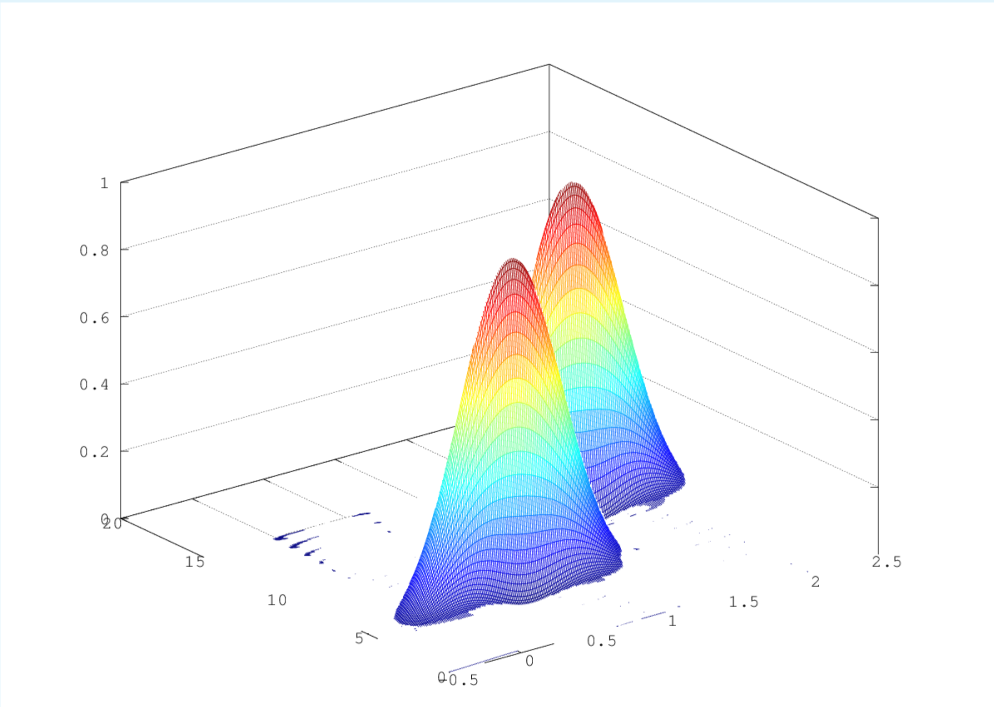
Ikkunoitu Fourier-muunnos antaa jotakin informaatiota signaalin s sisältämistä taajuuksista lyhyellä aikavälillä mutta ei ole suinkaan ainoa korjausyritys Fourier-muunnoksen heikoimpiin puoliin, jotka liittyvät siihen, että sen arvo tietyssä pisteessä riippuu signaalin arvoista kaikissa pisteissä.

Miksi ikkunointia?

Kuten Fourier-sarjojen kohdalla voidaan todeta, saadaan yleensä parempi tulos kun signaali rekonstruoidaan Fourier-kertoimista jos käytetään painotettu summa $\sum_{k=-N}^{N} \frac{N-|k|}{N} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt}$ *kuin jos lasketaan* $\sum_{k=-N}^{N} \hat{s}(k) e^{i2\pi kt}$. *Tässä tapauksessa käytetään siis diskreettiä ikkunafunktiota* $w(k) = \frac{N-|k|}{N}$. *Toisin sanoen, kun lasketaan Fourier-muunnoksia ja käänteismuunnoksia voi olla hyvä idea käyttää ikkunointia kiinteällä* τ*:n arvolla (esim.* 0*) ja valita ikkunafunktioksi esim.* $e^{-\epsilon t^2}$ *missä* ϵ *on pieni positiivinen luku.*

Esimerkki

Alla olevassa kuvassa on esitetty signaalin s ikkunoidun Fourier-muunnoksen itseisarvo ikkunafunktiolla $w(t) = e^{-4t^2}$ *missä* $s(t) = \sin(2\pi 5t)$ *kun* $0 \leq t \leq 1$, $s(t) = \sin(2\pi 10t)$ *kun* $1 \leq t \leq 2$ *ja* $s(t) = 0$ *muuten.*



Ikkunoidun Fourier-muunnoksen käänteismuunnos ja energia

Jos $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (mikä on järkevä valinta) ja $\sup_{t\in\mathbb{R}}|s(t)|(1+|t|)^{-m} < \infty$ jollain $m \geq 0$ niin Fourier-muunnoksen käänteismuunnoksella saadaan $s(t) = (\overline{w(t-\tau)})^{-1} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t} F(s,w)(\tau,\nu)\,\mathrm{d}\nu$, jos $w(t-\tau) \neq 0$. Mutta jos sen sijaan, että käänteismuunnoskaavassa jaetaan $\overline{w(t-\tau)}$:llä kerrotaan $w(t-\tau)$:lla ja integroidaan τ:n suhteen saadaan

$$s(t) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}}|w(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t} F(s,w)(\tau,\nu) w(t-\tau)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\tau$$

Koska $\int_{\mathbb{R}}|\hat{h}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}}|h(t)|^2\,\mathrm{d}t$ ja $\nu \mapsto F(s,w)(\tau,\nu)$ on Fourier-muunnos niin

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|F(s,w)(\tau,\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|s(t)|^2|w(t-\tau)|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_{\mathbb{R}}|w(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}}|s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}|w(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}}|\hat{s}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu,$$

eli ikkunoitu Fourier-muunnos jakaa signaalin "energian" toisella tavalla tasoon $\mathbb{R}^2$.

Ikkunoitu Fourier-muunnos konvoluutiona

Määritelmän mukaan

$$F(s,w)(\tau,\nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t)\overline{w(t-\tau)}\,\mathrm{d}t.$$

Oletetaan, että ikkuna-funktio $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Seuraavaksi esitetään funktio $t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\overline{w(t-\tau)}$ Fourier-muunnoksena ja käänteismuunnoksen avulla todetaan, että

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\overline{w(t-\tau)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\overline{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(t-\tau)\mu}\hat{w}(\mu)\,\mathrm{d}\mu}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t(\mu+\nu)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\tau\mu}\overline{\hat{w}(\mu)}\,\mathrm{d}\mu$$
$$\overset{\mu+\nu=\gamma}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\gamma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\tau(\nu-\gamma)}\overline{\hat{w}(\gamma-\nu)}\,\mathrm{d}\gamma.$$

Nyt $\overline{\hat{w}(\gamma-\nu)} = \widehat{\overline{w}}(\nu-\gamma)$ja näin ollen funktio $t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\overline{w(t-\tau)}$ on funktion $\gamma \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\tau(\nu-\gamma)}\widehat{\overline{w}}(\nu-\gamma)$ Fourier-muunnos.

Ikkunoitu Fourier-muunnos konvoluutiona, jatk.

Kertolaskukaavan nojalla pätee

$$F(s,w)(\tau,\nu) = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\gamma)e^{-i2\pi\tau(\nu-\gamma)}\widehat{\overline{w}}(\nu-\gamma)\,d\gamma = (\hat{s} * (M_{-\tau}\widehat{\overline{w}}))(\nu).$$

missä siis $M_x\psi(t) = e^{i2\pi xt}\psi(t)$.
Huomaa, että kertolaskukaavan käyttö kuten edellä edellyttää että esim $s \in L^1(\mathbb{R})$ *tai* $s \in L^2(\mathbb{R})$ *mutta vaimennetun distribuution Fourier-muunnoksen määritelmä on sama kaava joten yllä oleva tulos pätee myös jos* s *on vaimennettu distrubuutio koska jos* $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *ja* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *niin* $(h * \psi)(x)$ *on distribuution* h *arvo testifunktiolla* $t \mapsto \psi(x-t)$.

Diskreetti konvoluutio

Jos $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *ja* $\mathbf{b} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *ovat esim. sellaisia, että* $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mathbf{a}(j)| < \infty$ *ja* $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mathbf{a}(j)| < \infty$ *niin niiden konvoluutio* $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ *on*

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})(k) = \mathbf{c}(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kun tällaisen signaalin Fourier-muunnos on

$$\hat{\mathbf{a}}(\nu) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-i2\pi\nu j}\mathbf{a}(j),$$

niin pätee

$$\widehat{\mathbf{a} * \mathbf{b}}(\nu) = \hat{\mathbf{a}}(\nu)\hat{\mathbf{b}}(\nu).$$

Diskreetti jaksollinen konvoluutio

Jos signaalit $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *ja* $\mathbf{b} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *ovat jaksollisia jaksolla* N *niin niiden (jaksollinen) konvoluutio* $\mathbf{a} *_J \mathbf{b}$ *on*

$$(\mathbf{a} *_J \mathbf{b})(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j),$$

ja pätee

$$\widehat{\mathbf{a} *_J \mathbf{b}}(m) = \hat{\mathbf{a}}(m)\hat{\mathbf{b}}(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Konvoluutio $\mathbb{N}_0$:ssa

Jos $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *ja* $\mathbf{b} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *ovat sellaisia että* $\mathbf{a}(j) = \mathbf{b}(j) = 0$ *kun* $j < 0$ *niin*

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})(k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j), \quad k \geq 0,$$

ja $(\mathbf{a} * \mathbf{b})(k) = 0$ *kun* $k < 0$ *ja kaikilla* k *on laskettava ainoastaan äärellinen summa.*

Konvoluution laskeminen Fourier-muunnoksen avulla

Jos luvut $\mathbf{a}(j)$ *ja* $\mathbf{b}(j)$ *tunnetaan kun* $j = 0, \ldots, N-1$ *ja halutaan laskea*

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})(k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j), \quad k = 0, \ldots, N-1,$$

niin voidaan menetellä seuraavalla tavalla: Määritellään

$$\mathbf{a}_{2N}(j) = \begin{cases} \mathbf{a}(j), & j = 0, \ldots, N-1, \\ 0, & j = N, \ldots, 2N-1, \end{cases} \qquad \mathbf{a}_{2N}(j) = \mathbf{a}_{2N}(j+2N), \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathbf{b}_{2N}(j) = \begin{cases} \mathbf{b}(j), & j = 0, \ldots, N-1, \\ 0, & j = N, \ldots, 2N-1, \end{cases} \qquad \mathbf{b}_{2N}(j) = \mathbf{b}_{2N}(j+2N), \quad j \in \mathbb{Z},$$

Sitten lasketaan

$$\mathbf{c} = \mathcal{F}_{2N}^{-1}(\mathcal{F}_{2N}(\mathbf{a}_{2N}) \cdot \mathcal{F}_{2N}(\mathbf{b}_{2N}))$$

jolloin

$$\mathbf{c}(k) = (\mathbf{a} * \mathbf{b})(k), \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Miksi?

Koska jaksollisten jononjen konvoluution diskreetti Fourier-muunnos on Fourier-muunnosten tulo niin $c = \mathbf{a}_{2N} *_J \mathbf{b}_{2N}$ *eli*

$$\mathbf{c}(k) = \sum_{j=0}^{2N-1} \mathbf{a}_{2N}(k-j)\mathbf{b}_{2N}(j), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Koska $\mathbf{b}_{2N}(j) = \mathbf{b}(j)$ *kun* $j = 0, \ldots, N-1$ *ja* $b_{2N}(j) = 0$ *kun* $j = N, \ldots, 2N-1$ *niin*

$$\mathbf{c}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{a}_{2N}(k-j)\mathbf{b}(j), k \in \mathbb{Z}.$$

Mutta jos nyt $0 \leq k \leq N-1$ *ja* $k+1 \leq j \leq N-1$ *niin* $-N+1 \leq k-j \leq -1$ *jolloin* $N+1 \leq k-j+2N \leq 2N-1$ *josta seuraa, että* $\mathbf{a}_{2N}(k-j) = \mathbf{a}_{2N}(k-j+2N) = 0$. *Koska lisäksi* $\mathbf{a}_{2N}(k-j) = \mathbf{a}(k-j)$ *kun* $0 \leq j \leq k \leq N-1$ *niin*

Miksi?, jatk.

$$\mathbf{c}(k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}_{2N}(k-j)\mathbf{b}(j) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j), \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Jos lisäksi pätee $\mathbf{a}(j) = \mathbf{b}(j) = 0$ *kun* $j \geq N$ *ja* $N-1 \leq k \leq 2N-1$ *niin*

$$c(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{a}_{2N}(k-j)\mathbf{b}(j) = \sum_{j=k-N+1}^{N-1} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{a}(k-j)\mathbf{b}(j).$$

ja saadaan kaikki konvoluution termit indekseillä $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$ *(ja tässä tapauksessa konvoluutio on* 0 *kun* $k \geq 2N-1$*).*