

## MS-C1420 Fourier-analyysi Esimerkkejä, perusteluja, osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

23. tammikuuta 2014

Miksi konvoluution Fourier-muunnos on muunnosten tulo?

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)h(u) du \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu(t-u)} g(t-u)e^{-i2\pi\nu u} h(u) du \right) dt \\ & \text{integroimisjärjestyksen vaihto} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu(t-u)} g(t-u)e^{-i2\pi\nu u} h(u) dt \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu(t-u)} g(t-u) dt \right) e^{-i2\pi\nu u} h(u) du \\ & \quad t-u=\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu\tau} g(\tau) d\tau \right) e^{-i2\pi\nu u} h(u) du \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu\tau} g(\tau) d\tau \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu u} h(u) du \right) = \hat{g}(\nu)\hat{h}(\nu). \end{aligned}$$

Integroimisjärjestyksen vaihto on mahdollinen koska

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i2\pi\nu(t-u)} g(t-u)e^{-i2\pi\nu u} h(u)| du \right) dt < \infty.$$

$$\mathcal{F}(e^{-\pi t^2})(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$$

Merkitään  $h_0(t) = e^{-\pi t^2}$  ja  $g(\nu) = \hat{h}_0(\nu)$ . Fourier-muunnoksen derivoimissääntöjen nojalla pätee

$$g'(\nu) = \mathcal{F}((-i2\pi t)h_0(t))(\nu) = i\mathcal{F}((-2\pi t)h_0(t))(\nu),$$

$$\mathcal{F}(h_0')(\nu) = i2\pi\nu\mathcal{F}(h_0)(\nu) = i2\pi\nu g(\nu)$$

Lisäksi pätee  $h_0'(t) = -2\pi t h_0(t)$  joten

$$g'(\nu) = i\mathcal{F}((-2\pi t)h_0(t))(\nu) = i\mathcal{F}(h_0')(\nu) = i^2 2\pi\nu g(\nu) = -2\pi\nu g(\nu).$$

Tästä taas seruraa, että  $\frac{d}{d\nu} e^{\pi\nu^2} g(\nu) = 0$  joten  $e^{\pi\nu^2} g(\nu)$  on vakio ja erityisesti  $e^{\pi\nu^2} g(\nu) = e^{\pi 0^2} g(0) = g(0)$  joten

$$\hat{h}_0(\nu) = g(\nu) = g(0)e^{-\pi\nu^2} = g(0)h_0(\nu).$$

Koska (olettaen, että käänteiskaava pätee kun  $s$  ja  $\hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ )

$$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \mathcal{F}(g(-\nu))(t)$$

$$= \mathcal{F}(g(\nu))(t) = g(0)\mathcal{F}(h_0)(t) = g(0)g(0)h_0(t),$$

niin saadaan  $g(0)^2 = 1$  josta seuraa, että  $g(0) = 1$  koska  $h_0(t) > 0$ .

Miksi  $\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} k(-\nu)\hat{s}(\nu) d\nu = (\hat{k} * s)(t)$ ?

Funktion  $h(\nu) = e^{i2\pi\nu t} k(-\nu)$  Fourier-muunnos on

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\omega\nu} e^{i2\pi\nu t} k(-\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi(\omega-t)\nu} k(-\nu) d\nu \\ & \quad \nu = -\tau \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi(t-\omega)\tau} k(\tau) d\tau = \hat{k}(t-\omega). \end{aligned}$$

Kertolaskukaavan avulla saadaan nyt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} k(-\nu)\hat{s}(\nu) d\nu &= \int_{\mathbb{R}} h(\nu)\hat{s}(\nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\omega)s(\omega) d\omega = \int_{\mathbb{R}} \hat{k}(t-\omega)s(\omega) d\omega = (\hat{k} * s)(t). \end{aligned}$$

### Miksi Fourier-muunnoksen käänteiskaava on voimassa?

Valitaan kaavassa  $\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} p(-\nu) \hat{s}(\nu) d\nu = (\hat{p} * s)(t)$  funktioksi  $p$  funktio  $p_{\epsilon}(\nu) = e^{-\epsilon\nu^2}$  jolloin  $p(-\nu) = e^{-\epsilon\nu^2}$  ja  $\hat{p}_{\epsilon}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon}} h_0\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon}}\omega\right)$ .

Konvoluutioiden approksimaatio-ominaisuuksista seuraa nyt että  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |s(t) - (\hat{p}_{\epsilon} * s)(t)| dt = 0$  ja että  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} (\hat{p}_{\epsilon} * s)(t) = s(t)$  jos  $s$  on jatkuva pisteessä  $t$ .

Jos  $\hat{s}$  lisäksi on integroituva niin

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} \hat{s}(\nu) e^{-\epsilon\nu^2} d\nu = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} \hat{s}(\nu) d\nu.$$

### Huom!

Yllä oleva päättely perustui siihen, että tiedetään, että funktion

$h_0(t) = e^{-\pi t^2}$  Fourier-muunnos on  $h_0$  mutta oleellista on ainoastaan että löydetään jokin funktio  $p \in L^1(\mathbb{R})$  siten, että  $\hat{p} \in L^1(\mathbb{R})$  ja

$p(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{p}(\nu) d\nu \neq 0$  (mikä on eri asia kuin että  $\hat{p}(0) = \int_{\mathbb{R}} p(t) dt$

kunnes käänteiskaava on tullut todistetuksi mutta ei sen jälkeen) ja jos  $2\pi$  termissä  $e^{-i2\pi\nu t}$  vaihdetaan itseisarvoltaan toiseen lukuun tämä ei onnistu!

### $L^2$ -funktioiden konvoluutio

Jos  $g$  ja  $h \in L^2(\mathbb{R})$  niin voidaan osoittaa, että konvoluutio  $(g * h)(t)$  on jatkuva ja  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} (g * h)(t) = 0$  eli  $g * h \in C_0(\mathbb{R})$  mutta on mahdollista, että  $g * h \notin L^1(\mathbb{R})$  ja  $g * h \notin L^2(\mathbb{R})$  joten Fourier-muunnosta  $\widehat{g * h}$  ei voida vielä määrittää. Mutta koska  $\hat{g}$  ja  $\hat{h} \in L^2(\mathbb{R})$  niin  $\hat{g}\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$  ja tämän funktion Fourier-muunnos on laskettavissa ja tuloksen pitäisi olla

$$\widehat{\hat{g}\hat{h}}(t) = (g * h)(-t).$$

Tämän osoittamiseksi valitaan  $t \in \mathbb{R}$  ja määritellään  $q(u) = \overline{h(-u - t)}$ . Silloin

$$\overline{\hat{q}(\nu)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu s} \overline{h(-u - t)} du} = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi(-\tau - t)h(\tau)} d\tau = e^{-i2\pi\nu t} \hat{h}(\nu),$$

joten

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu t} \hat{g}(\nu) \hat{h}(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) \overline{\hat{q}(\nu)} d\nu.$$

### $L^2$ -funktioiden konvoluutio, jatk.

Koska  $\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) \overline{\hat{q}(\nu)} d\nu = \int_{\mathbb{R}} g(u) \overline{q(u)} du$  niin

$$\widehat{\hat{g}\hat{h}}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(u) \overline{q(u)} du = \int_{\mathbb{R}} g(u) h(-u - t) du = (g * h)(-t).$$

Huomaa myös, että jos  $g$  ja  $h \in L^1(\mathbb{R})$  niin pätee tietenkin  $\mathcal{F}(g * h) = \hat{g}\hat{h}$  mutta silloin tiedetään ainoastaan, että  $\hat{g}\hat{h} \in C_0(\mathbb{R})$  ja tämänkin funktion Fourier-muunnoksen laskeminen ei onnistu suoraan perusmääritelmällä.

### 😊 FFT:n perusideat

Diskreetin Fourier-muunnoksen tehokas käyttö perustuu siihen, että on mahdollista laskea se nopeasti ja tehokkaasti, mutta jos lähdetään laskemaan suoraan määritelmästä joudutaan suorittamaan suurin piirtein  $N^2$  laskuoperaatiota. Laskun nopeuttamiseksi voidaan käyttää esim. seuraavanlaisia ideoita: Olkoon  $N$  parillinen luku ja olkoon  $s$   $N$ -jaksollinen diskreetti signaali. Nyt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(\mathbf{s})(m) &= \hat{\mathbf{s}}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi mk}{N}} \mathbf{s}(k) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{i2\pi m2j}{N}} \mathbf{s}(2j) + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{i2\pi m(2j+1)}{N}} \mathbf{s}(2j+1) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{i2\pi mj}{N}} \mathbf{s}(2j) + e^{-\frac{i2\pi m}{N}} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{i2\pi mj}{N}} \mathbf{s}(2j+1) \\ &= \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}(\mathbf{s}(0 : 2 : N - 2))(m) + e^{-\frac{i2\pi m}{N}} \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}(\mathbf{s}(1 : 2 : N - 1))(m). \end{aligned}$$

## 😊 FFT:n perusideat, jatkuu

Kun lisäksi muistetaan, että  $\mathcal{F}_N(\mathbf{G})$  on jaksollinen jaksolla  $\frac{N}{2}$  ja että

$e^{-\frac{i2\pi(m+\frac{N}{2})}{N}} = -e^{-\frac{i2\pi m}{N}}$  niin nähdään, että kun kirjoitetaan vektorit pystyvektoreina niin saadaan

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{s}) = B_N \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}(\mathbf{s}(0 : 2 : N - 2)) \\ \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}(\mathbf{s}(1 : 2 : N - 1)) \end{bmatrix},$$

missä

$$B_M = \begin{bmatrix} I_{\frac{M}{2}} & \Omega_{\frac{M}{2}} \\ I_{\frac{M}{2}} & -\Omega_{\frac{M}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \Omega_M = \text{diag} \left( \left[ 1 \quad e^{-\frac{i\pi}{M}} \quad e^{-\frac{i\pi 2}{M}} \quad \dots \quad e^{-\frac{i\pi(M-1)}{M}} \right] \right)$$

## 😊 FFT:n perusideat, jatkuu

Jos nyt  $N = 2^q$  ja

$$A_k = I_{2^{q-k}} \otimes B_{2^k} = \text{diag}([B_{2^k}, \dots, B_{2^k}])$$

niin silloin

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{s}) = A_q A_{q-1} \dots A_1 P_N \mathbf{s}$$

missä  $P_N \mathbf{s}$  on permutaatio vektorista  $\mathbf{s}$ .

Kun lisäksi huomataan, että kun kerrotaan vektoria matriisilla  $A_k$  niin jokaisen elementin laskemiseksi on kerrottava yksi elementti kompleksiluvulla ja tulokseen lisätään toinen kompleksiluku eli kaiken kaikkiaan  $N$  kertolaskua ja  $N$  yhteenlaskua ja kaiken kaikkiaan on siis laskettava  $qN$  kertolaskua ja  $qN$  yhteenlaskua. Nopea Fourier-muunnos on siis todella huomattavasti nopeampi kuin suoraviivainen määritelmän soveltaminen. Vastaavasti nopeita Fourier-muunnos algoritmeja on myös olemassa tapauksissa kun  $N \neq 2^k$ .

## 💡 Fourier-sarjan suppeneminen, I

Jos  $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  ja  $t_0$  on sellainen, että  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|t|} |s(t+t_0) - s(t_0)| dt < \infty$  niin

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^N e^{i2\pi k t_0} \hat{s}(k) = s(t_0).$$

## 😊 Miksi

Määritellään

$$g(t) = \frac{s(t+t_0) - s(t_0)}{e^{-i2\pi t} - 1}$$

ainakin kun  $t$  ei ole kokonaisluku (ja esim.  $g(t) = 0$  kun  $t \in \mathbb{Z}$ ). Koska  $|e^{-i2\pi t} - 1| \geq 4|t|$  kun  $|t| \leq \frac{1}{2}$  niin  $g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  ja Riemann-Lebesguen lemmän nojalla pätee  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{g}(k) = 0$ .

## 😊 Todistus jatkuu

Koska  $s(t+t_0) = g(t)(e^{-i2\pi t} - 1) + s(t_0)$  niin

$$\begin{aligned} \hat{s}(k) e^{i2\pi k t_0} &= \int_0^1 e^{-i2\pi k(t-t_0)} s(t) dt = \int_{-t_0}^{1-t_0} e^{-i2\pi k \tau} f(\tau + t_0) dt \\ &= \int_0^1 e^{-i2\pi k t} f(t+t_0) dt = \int_0^1 e^{-i2\pi(k+1)t} g(t) dt - \int_0^1 e^{-i2\pi k t} g(t) dt \\ &\quad + \int_0^1 e^{-i2\pi k t} f(t_0) dt = \hat{g}(k+1) - \hat{g}(k) + f(t_0) \delta_{0,k} \end{aligned}$$

missä  $\delta_{0,k} = 1$  kun  $k = 0$  ja 0 muuten koska  $\int_0^1 e^{-i2\pi 0 \cdot t} dt = 1$  ja  $\int_0^1 e^{-i2\pi k t} dt = \int_0^1 \frac{1}{-i2\pi k} e^{-i2\pi k t} dt = 0$  jos  $k \neq 0$ . Tästä seuraa, että jos  $-M < 0$  ja  $N > 0$  niin

$$\sum_{k=-M}^N \hat{s}(k) e^{i2\pi k t_0} = \hat{g}(N+1) - \hat{g}(-M) + f(t_0)$$

ja väite seuraa koska  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{g}(N+1) = \lim_{M \rightarrow \infty} \hat{g}(-M) = 0$ .