MS-C1420 Fourier-analyysi
Esimerkkejä, perusteluja, osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

23. tammikuuta 2014

Miksi konvoluution Fourier-muunnos on muunnosten tulo?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)h(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu(t-u)}g(t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu u}h(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\textit{integroimisjärjestyksen vaihto}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu(t-u)}g(t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu u}h(u)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu(t-u)}g(t-u)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu u}h(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\overset{t-u=\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu\tau}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu u}h(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu\tau}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu u}h(u)\,\mathrm{d}u\right) = \hat{g}(\nu)\hat{h}(\nu).$$

Integroimisjärjestyksen vaihto on mahdollinen koska $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu(t-u)}g(t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu u}h(u)|\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t < \infty$.

$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\pi t^2})(\nu) = \mathrm{e}^{-\pi\nu^2}$

Merkitään $h_0(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ *ja* $g(\nu) = \widehat{h_0}(\nu)$. *Fourier-muunnoksen derivoimissääntöjen nojalla pätee*

$$g'(\nu) = \mathcal{F}\big((-\mathrm{i}2\pi t)h_0(t)\big)(\nu) = \mathrm{i}F\big((-2\pi t)h_0(t)\big)(\nu),$$
$$\mathcal{F}(h_o')(\nu) = \mathrm{i}2\pi\nu\mathcal{F}(h_0)(\nu) = \mathrm{i}2\pi\nu g(\nu)$$

Lisäksi pätee $h_0'(t) = -2\pi t h_0(t)$ *joten*

$$g'(\nu) = \mathrm{i}\mathcal{F}\big((-2\pi t)h_0(t)\big)(\nu) = \mathrm{i}\mathcal{F}(h_o')(\nu) = \mathrm{i}^2 2\pi\nu g(\nu) = -2\pi\nu g(\nu).$$

Tästä taas seuraa, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\mathrm{e}^{\pi\nu^2}g(\nu) = 0$ *joten* $\mathrm{e}^{\pi\nu^2}g(\nu)$ *on vakio ja erityisesti* $\mathrm{e}^{\pi\nu^2}g(\nu) = \mathrm{e}^{\pi 0^2}g(0) = g(0)$ *joten*

$$\widehat{h_0}(\nu) = g(\nu) = g(0)\mathrm{e}^{-\pi\nu^2} = g(0)h_0(\nu).$$

Koska (olettaen, että käänteiskaava pätee kun s *ja* $\hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$*)*

$$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \mathcal{F}(g(-\nu))(t)$$
$$= \mathcal{F}(g(\nu))(t) = g(0)\mathcal{F}(h_0)(t) = g(0)g(0)h_0(t),$$

niin saadaan $g(0)^2 = 1$ *josta seuraa, että* $g(0) = 1$ *koska* $h_0(t) > 0$.

Miksi $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}k(-\nu)\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = (\hat{k} * s)(t)$?

Funktion $h(\nu) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}k(-\nu)$ *Fourier-muunnos on*

$$\hat{h}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\omega\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}k(-\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\omega-t)\nu}k(-\nu)\,\mathrm{d}\nu$$
$$\overset{\nu=-\tau}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(t-\omega)\tau}k(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \hat{k}(t-\omega).$$

Kertolaskukaavan avulla saadaan nyt

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}k(-\nu)\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} h(\nu)\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\omega)s(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \int_{\mathbb{R}} \hat{k}(t-\omega)s(\omega)\,\mathrm{d}\omega = (\hat{k} * s)(t).$$

Miksi Fourier-muunnoksen käänteiskaava on voimassa?

Valitaan kaavassa $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t} p(-\nu)\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = (\hat{p} * s)(t)$ *funktioksi* p *funktio* $p_\epsilon(\nu) = \mathrm{e}^{-\epsilon\nu^2}$ *jolloin* $p(-\nu) = \mathrm{e}^{-\epsilon\nu^2}$ *ja* $\widehat{p_\epsilon}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon}} h_0(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon}}\omega)$.
Konvoluutioiden approksimaatio-ominaisuuksista seuraa nyt että $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |s(t) - (\widehat{p_\epsilon} * s)(t)|\,\mathrm{d}t = 0$ *ja että* $\lim_{\epsilon\downarrow 0}(\widehat{p_\epsilon} * s)(t) = s(t)$ *jos* s *on jatkuva pisteessä* t.
Jos $\hat{s}$ *lisäksi on integroituva niin* $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\hat{s}(\nu)\mathrm{e}^{-\epsilon\nu^2}\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\hat{s}(\nu)\,\mathrm{d}\nu$.

Huom!

Yllä oleva päättely perustui siihen, että tiedetään, että funktion $h_0(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ *Fourier-muunnos on* h_0 *mutta oleellista on ainoastaan että löydetään jokin funktio* $p \in L^1(\mathbb{R})$ *siten, että* $\hat{p} \in L^1(\mathbb{R})$ *ja* $p(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{p}(\nu)\,\mathrm{d}\nu \neq 0$ *(mikä on eri asia kuin että* $\hat{p}(0) = \int_{\mathbb{R}} p(t)\,\mathrm{d}t$ *kunnes käänteiskaava on tullut todistetuksi mutta ei sen jälkeen) ja jos* 2π *termissä* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}$ *vaihdetaan itseisarvoltaan toiseen lukuun tämä ei onnistu!*

L^2-funktioiden konvoluutio

Jos g *ja* $h \in L^2(\mathbb{R})$ *niin voidaan osoittaa, että konvoluutio* $(g * h)(t)$ *on jatkuva ja* $\lim_{|t|\to\infty}(g * h)(t) = 0$ *eli* $g * h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ *mutta on mahdollista, että* $g * h \notin L^1(\mathbb{R})$ *ja* $g * h \notin L^2(\mathbb{R})$ *joten Fourier-muunnosta* $\widehat{g * h}$ *ei voida vielä määritellä. Mutta koska* $\hat{g}$ *ja* $\hat{h} \in L^2(\mathbb{R})$ *niin* $\hat{g}\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ *ja tämän funktion Fourie-muunnos on laskettavissa ja tuloksen pitäisi olla*

$$\widehat{\hat{g}\hat{h}}(t) = (g * h)(-t).$$

Tämän osoittamiseksi valitaan $t \in \mathbb{R}$ *ja määritellään* $q(u) = \overline{h(-u-t)}$. *Silloin*

$$\overline{\hat{q}(\nu)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu s}\overline{h(-u-t)}\,\mathrm{d}u} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(-\tau-t)}}\,\overline{\overline{h(\tau)}}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\hat{h}(\nu),$$

joten

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\hat{g}(\nu)\hat{h}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu)\overline{\hat{q}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu.$$

L^2-funktioiden konvoluutio, jatk.

Koska $\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu)\overline{\hat{q}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} g(u)\overline{q(u)}\,\mathrm{d}u$ *niin*

$$\widehat{\hat{g}\hat{h}}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(u)\overline{q(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} g(u)h(-u-t)\,\mathrm{d}u = (g*h)(-t).$$

Huomaa myös, että jos g *ja* $h \in L^1(\mathbb{R})$ *niin pätee tietenkin* $\mathcal{F}(g*h) = \hat{g}\hat{h}$ *mutta silloin tiedetään ainoastaan, että* $\hat{g}\hat{h} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ *ja tämänkin funktion Fourier-muunnoksen laskeminen ei onnistu suoraan perusmääritelmällä.*

FFT:n perusideat

Diskreetin Fourier-muunnoksen tehokas käyttö perustuu siihen, että on mahdollista laskea se nopeasti ja tehokkaasti, mutta jos lähdetään laskemaan suoraan määritelmästä joudutaan suorittamaan suurin piirtein N^2 *laskuoperaatiota. Laskun nopeuttamiseksi voidaan käyttää esim. seuraavanlaisia ideoita: Olkoon* N *parillinen luku ja olkoon* $\mathbf{s}$ N*-jaksollinen diskreetti signaali. Nyt*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_N(\mathbf{s})(m) = \hat{\mathbf{s}}(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mk}{N}} \mathbf{s}(k) \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi m2j}{N}} \mathbf{s}(2j) + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi m(2j+1)}{N}} \mathbf{s}(2j+1) \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{\frac{N}{2}}} \mathbf{s}(2j) + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi m}{N}} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mj}{\frac{N}{2}}} \mathbf{s}(2j+1) \\
&= \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}(\mathbf{s}(0:2:N-2))(m) + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi m}{N}} \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}(\mathbf{s}(1:2:N-1))(m).
\end{aligned}$$

FFT:n perusideat, jatkuu

Kun lisäksi muistetaan, että $\mathcal{F}_{\frac{N}{2}}(\mathbf{G})$ *on jaksollinen jaksolla* $\frac{N}{2}$ *ja että* $e^{-\frac{i2\pi(m+\frac{N}{2})}{N}} = -e^{-\frac{i2\pi m}{N}}$ *niin nähdään, että kun kirjoitetaan vektorit pystyvektoreina niin saadaan*

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{s}) = B_N \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}(\mathbf{s}(0:2:N-2)) \\ \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}(\mathbf{s}(1:2:N-1)) \end{bmatrix},$$

missä

$$B_M = \begin{bmatrix} I_{\frac{M}{2}} & \Omega_{\frac{M}{2}} \\ I_{\frac{M}{2}} & -\Omega_{\frac{M}{2}} \end{bmatrix} \quad ja \quad \Omega_M = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{i\pi}{M}} & e^{-\frac{i\pi 2}{M}} & \dots & e^{-\frac{i\pi(M-1)}{M}} \end{bmatrix}\right)$$

FFT:n perusideat, jatkuu

Jos nyt $N = 2^q$ *ja*

$$A_k = I_{2^{q-k}} \otimes B_{2^k} = \mathrm{diag}([B_{2^k}, \dots, B_{2^k}])$$

niin silloin

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{s}) = A_q A_{q-1} \dots A_1 P_N \mathbf{s}$$

missä $P_N\mathbf{s}$ *on permutaatio vektorista* $\mathbf{s}$*.*
Kun lisäksi huomataan, että kun kerrotaan vektoria matriisilla A_k *niin jokaisen elementin laskemiseksi on kerrottava yksi elementti kompleksiluvulla ja tulokseen lisätään toinen kompleksiluku eli kaiken kaikkiaan* N *kertolaskua ja* N *yhteenlaskua ja kaiken kaikkiaan on siis laskettava* qN *kertolaskua ja* qN *yhteenlaskua. Nopea Fourier-muunnos on siis todella huomattavasti nopeampi kuin suoraviivainen määritelmän soveltaminen. Vastaavasti nopeita Fourier-muunnosalgoritmeja on myös olemassa tapauksissa kun* $N \neq 2^k$*.*

Fourier-sarjan suppeneminen, I

Jos $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja* t_0 *on sellainen, että* $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|t|}\,|s(t+t_0)-s(t_0)|\,\mathrm{d}t < \infty$ *niin*

$$\lim_{N,M\to\infty} \sum_{k=-M}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k t_0}\hat{s}(k) = s(t_0).$$

Miksi

Määritellään

$$g(t) = \frac{s(t+t_0)-s(t_0)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t}-1}$$

ainakin kun t *ei ole kokonaisluku (ja esim.* $g(t)=0$ *kun* $t \in \mathbb{Z}$*). Koska* $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t}-1| \geq 4|t|$ *kun* $|t| \leq \frac{1}{2}$ *niin* $g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *ja Riemann-Lebesguen lemman nojalla pätee* $\lim_{|k|\to\infty}\hat{g}(k) = 0$.

Todistus jatkuu

Koska $s(t+t_0) = g(t)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t}-1)+s(t_0)$ *niin*

$$\hat{s}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k t_0} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k(t-t_0)}s(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-t_0}^{1-t_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k\tau}f(\tau+t_0)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}f(t+t_0) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(k+1)t}g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}g(t)\,\mathrm{d}t$$
$$+ \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}f(t_0)\,\mathrm{d}t = \hat{g}(k+1)-\hat{g}(k)+f(t_0)\delta_{0,k}$$

missä $\delta_{0,k}=1$ *kun* $k=0$ *ja* 0 *muuten koska* $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi 0\cdot t}\,\mathrm{d}t = 1$ *ja* $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}\,\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt} = 0$ *jos* $k \neq 0$*. Tästä seuraa, että jos* $-M<0$ *ja* $N>0$ *niin*

$$\sum_{k=-M}^{N} \hat{s}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k t_0} = \hat{g}(N+1)-\hat{g}(-M)+f(t_0)$$

ja väite seuraa koska $\lim_{N\to\infty}\hat{g}(N+1) = \lim_{M\to\infty}\hat{g}(-M) = 0$.