Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi
Harjoitus 5
5-7.2.2014, viikko 6

Gripenberg, Ruponen, Saari

Palauta P-tehtävät viimeistään 10.2.2014 kl. 14
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Osoita, että vaimennetun distribuution $\text{III} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ Fourier-muunnos on III (eli se on Fourier-munnoksen ominaisvektori ominaisarvolla 1). Tässä δ_k on vaimennettu distribuutio, jonka arvo funktiolla ψ on $\delta_k(\psi) = \psi(k)$.

Vihje: Käytä Poissonin summakaavaa.

P2. Määritä funktion $s(t) = t\cos(2\pi t)$ määräämän vaimennetun distribuution Fourier-muunnos.

Vastaus: $\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\delta_1' + \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\delta_{-1}'$

P3. Osoita, että jos $s \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ on sellainen, että $\hat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ niin $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{s}(\nu - j) = 1$ kaikilla ν jos ja vain jos $s(0) = 1$ ja $s(k) = 0$ kun $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

P4. Olkoon

$$T_N(t) = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{|k|<\frac{N}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt}, & \text{jos } N \text{ on pariton,} \\ \frac{1}{N}\left(\sum_{|k|<\frac{N}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kt} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{N}{2}t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{N}{2}t}\right), & \text{jos } N \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

(a) Määritä funktion T_N Fourier-kertoimet.
(b) Osoita, että $T_N(\frac{j}{N}) = 1$ jos $\bmod(j, N) = 0$ ja 0 muuten.
(c) Minkä funktion ”jaksollistus” T_N on eli mikä on se funktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolle pätee $T_N(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h(t - j)$?

Huom! *(b)-kohdan nojalla pätee että jos s on jaksollinen funktio ja $g(t) = \sum_{j=0}^{N-1} s(\frac{j}{N})T_N(t - \frac{j}{N})$ niin $g(\frac{j}{N}) = s(\frac{j}{N})$ kaikilla j eli kyse on ns. trigonometrisestä interpolaatiosta ja lisäksi voidaan osoittaa, että $|g(t) - s(t)| \leq 2\sum_{|k|>N/2}|\hat{s}(k)|$ jos N on pariton ja $|g(t) - s(t)| \leq |\hat{s}(-\frac{N}{2})| + |\hat{s}(\frac{N}{2})| + 2\sum_{|k|>N/2}|\hat{s}(k)|$ jos N on parilllinen.*

P5. Olkoon $\mathbf{h} : \mathbf{Z} \to \mathbb{C}$ jaksollinen jaksolla $N > 1$. Nyt voidaan laskea jonon $\mathbf{h}$ diskreetti Fourier-muunnos $\hat{\mathbf{h}} = \mathcal{F}_N(\mathbf{h})$ mutta toisaalta voidaan laskea vaimennetun distribuution $q = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{h}(k)\delta_{k\Delta t}$ Fourier-muunnos $\hat{q}$ (missä Δt on jokin positiivinen luku). Miten $\hat{\mathbf{h}}$ ja $\hat{q}$ liittyvät toisiinsa?

Vastaus: $\hat{q} = \Delta\nu \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{h}}(m)\delta_{m\Delta\nu}$

Vastaa Stack-tehtäviin (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=16`)
viimeistään 10.2.2014 kl. 14.00
