Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi
Harjoitus 3
22–24.1.2014, viikko 4

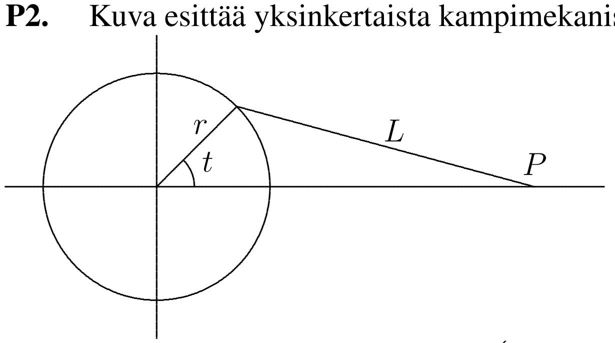
Gripenberg, Ruponen, Saari

Palauta P-tehtävät viimeistään 27.1.2014 kl. 14.00
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Osoita, että jos $\hat{\mathbf{g}}$ ja $\hat{\mathbf{h}}$ ovat N-jaksollisten jonojen $\mathbf{g}$ ja $\mathbf{h}$ diskreetit Fourier-muunnokset, niin

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{g}(m)\overline{\mathbf{h}(m)} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{\mathbf{g}}(m)\overline{\hat{\mathbf{h}}(m)}.$$

P2. Kuva esittää yksinkertaista kampimekanismia (esim. polttomoottorissa).



Pisteen P x-koordinaatti on $x(t) = r\left(\cos(t) + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2\sin(t)^2}\right)$ missä $\lambda = \frac{r}{L}$. Laske funktion $x(t)$ Fourier-kertoimien likarvoja käyttämällä approksimaatiota $\sqrt{1-z} \approx 1 - \frac{z}{2}$ ja kaavaa $\sin(t)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$.

Huom! *Sinun ei tarvitse laskea yhtään intgeraalia!*

Vastaus: $\hat{x}(\pm 2) \approx \frac{r^2}{8L}$, $\hat{x}(\pm 1) \approx \frac{r}{2}$, $\hat{x}(0) \approx L - \frac{r^2}{4L}$

P3. Olkoon f esim. jatkuvasti derivoituva ja jaksollinen jaksolla T. Osoita, että

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right),$$

missä

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Voit olettaa tunnetuksi, että $f(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}}\hat{f}(n)$ missä $\hat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

P4. Olkoon $s(t) = \frac{1}{2} - t$, $t \in (0,1)$. Laske funktion s Fourier-kertoimet ja niiden avulla summa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, käyttäen hyväksi tietoa, että Fourier-muunnos on isometria : $L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ eli $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{s}(n)|^2 = \int_0^1 |s(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

Vastaus: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

P5. Jos $\mathbf{s}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ on jaksollinen diskreetti signaali jaksolla N niin voidaan laskea sen diskreetti Fourier-muunnos $\mathcal{F}_N(\mathbf{s})$. Mutta tämä signaali on myös jaksollinen jaksolla $2N$ jolloin siis voidaan myös laskea $\mathcal{F}_{2N}(\mathbf{s})$. Mikä on yhteys näiden muunnosten $\mathcal{F}_N(\mathbf{s})$ ja $\mathcal{F}_{2N}(\mathbf{s})$ välillä? Perustele jollain muullakin tavalla kuin valitsemalla mielivaltainen vektori `x` ja laskemalla sekä `fft(x)` että `fft([x,x])`, mikä siis on erinomainen tapa selvittää mitä vastauksen pitää olla.

Vastaa Stack-tehtäviin (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=16`)
viimeistään 27.1.2014 kl. 14.00
