Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi — Gripenberg, Ruponen, Saari
Harjoitus 2
15–17.1.2014, viikko 3
Palauta P-tehtävät viimeistään 20.1.2014 kl. 14
**Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!**

**P1.** Laske funktion $s(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$ Fourier-muunnos $\hat{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t)\,\mathrm{d}t$ missä $a > 0$.

Vastaus: $\frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$

**P2.** Olkoon $h_a(t) = \dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$. Osoita tehtävän P1 tuloksen avulla, että $h_a * h_b = h_{a+b}$.

**Huom!** *Todennäköisyyslaskennallinen tulkinta tästä on, että jos riippumattomien satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ jakaumat ovat $h_a$ ja $h_b$ niin satunnaismuuttujan $X + Y$ jakauma on samaa tyyppiä eli $h_{a+b}$. Jos tällaisia satnnuaismuuttujia, joilla ei edes ole odotusarvoa, lasketaan yhteen, ei siis saada raja-arvona mitään normaalijakautunutta.*

**P3.** Osoita, että jos $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin $\overline{h(t)} = \hat{q}(t)$ missä $q(t) = \overline{\hat{h}(t)}$. Osoita tämän tuloksen ja kaavan $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{q}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu)q(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ avulla, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu)\overline{\hat{h}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu, \quad g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

(josta sitten erikoisesti seuraa, että $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu$.)

**P4.** Olkoon $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja märitellään $\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} s(t)\,\mathrm{d}t$, eli $2\pi$ on jätetty pois eksponenttifunktiosta. Määritä vakiot $c_1$ ja $c_2$ siten, että

$$s(t) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tilde{s}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

Vastaus: $\frac{1}{2\pi}$

**P5.** Olkoon $h_n(t) = \mathrm{e}^{\pi t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\right)$. Osoita induktiolla, että

$$\widehat{h_n} = (-\mathrm{i})^n h_n, \quad n \geq 0,$$

esim. seuraavalla tavalla:

- Voit olettaa tunnetuksi, että $\widehat{h_0} = h_0$ joten väite pätee kun $n = 0$.
- Käytä osittaisintegrointia osoittamaan, että

$$\widehat{h_{k+1}}(\nu) = \mathrm{i}2\pi\nu\widehat{h_k}(\nu) - \frac{1}{-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\widehat{h_k}(\nu).$$

- Oleta, että väite pätee kun $n = k$ ja käytä tätä oletusta edellisen kohdan tuloksessa niin, että pystyt osoittamaan, että väite pätee myös kun $n = k+1$ (jolloin siis saadaan väitetty tulos induktioperiaatteen avulla).

---

Vastaa Stack-tehtäviin (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=16`)
viimeistään 20.1.2014