Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi
Harjoitus 1
8-10.1.2014, viikko 2

Gripenberg, Ruponen, Saari

Palauta P-tehtävät viimeistään 13.1.2014 kl. 14
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Esitä funktiot $\cos(t)$ ja $\sin(t)$ funktioiden $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ja $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ avulla ja laske näiden tulosten avulla $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t$ kun $a > 0$.

Vihje: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$, *funktion* $t \mapsto \mathrm{e}^{ct}$ *integraalifunktio on* $\frac{1}{c}\mathrm{e}^{ct}$ *kun* $c \neq 0$ *myös kun* c *on kompleksiluku ja* $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{ct} = 0$ *jos (ja vain jos)* $\mathrm{Re}\,(c) < 0$.

P2. Laske funktion h Fourier-muunnos $\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} h(t)\,\mathrm{d}t$ kun $h(t) = 1$ kun $|t| \leq \frac{1}{2}$ ja $h(t) = 0$ kun $|t| > \frac{1}{2}$. Päteekö $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\nu)|\,\mathrm{d}\nu < \infty$? Entä $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu < \infty$ ja $\lim_{|\nu|\to\infty} \hat{h}(\nu) = 0$?

Vastaus: $\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$

P3. Olkoon (kuten tehtävässä P2) $h(t) = 1$ kun $|t| \leq \frac{1}{2}$ ja $h(t) = 0$ kun $|t| > \frac{1}{2}$.

(a) Laske funktio $q(t) = (h * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. (Tarkastele erikseen tapaukset $t < -1$, $-1 \leq t \leq 0$, $0 < t \leq 1$ ja $t > 1$.)

(b) Laske $\hat{q}(\nu)$ käyttäen hyväksi tulos jonka mukaan konvoluution Fourier-muunnos on tekijöiden Fourier-muunnosten tulo ja tehtävän P2 tulosta.

Vastaus: (a) $\max\{0, 1 - |t|\}$

P4. Funktion g Laplace muunnos määritellään kaavalla

$$\mathcal{L}(g)(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Esitä Laplace-muunnos Fourier-muunnoksen avulla, ja anna käänteiskaava Laplace-muunnokselle käyttäen hyväksi Laplace-muunnoksen arvot $\mathcal{L}(g)(\sigma + \mathrm{i}y)$, $y \in \mathbb{R}$. Voit olettaa, että tämä funktio on integroituva.

Vihje: Funktio $\nu \mapsto \mathcal{L}(g)(\sigma + \mathrm{i}2\pi\nu)$ *on tietyn funktion Fourier-muunnos. Esitä tämä funktio Fourier-muunnoksen käänteiskaavan avulla.*

P5. Osoita, että jos s on äärettömän monta kertaa derivoituva ja $\sup_{t\in\mathbb{R}}|t^j s^{(k)}(t)| < \infty$ kaikilla $j,k \geq 0$, (jolloin merkitään $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) niin $\nu^j \hat{s}^{(k)}(\nu)$ on funktion $(-1)^k(\mathrm{i}2\pi)^{k-j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left(t^k s(t)\right)$ Fourier-muunnos esim. seuraavalla tavalla:

(a) Määrittele funktio $g_{j,k}$ kaavalla $g_{j,k}(t) = (-1)^k(\mathrm{i}2\pi)^{k-j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left(t^k s(t)\right)$ ja osoita osittaisintegroinnilla, että $\widehat{g_{j,k}}(\nu) = \nu\widehat{g_{j-1,k}}(\nu)$.
(b) Esitä $\widehat{g_{j,k}}(\nu)$ funktion $\widehat{g_{0,k}}(\nu)$ avulla.
(c) Laske $\hat{s}^{(k)}(\nu)$.
(d) Käytä hyväksi kohtien (b) ja (c) tuloksia.

Huom! *Tämän tuloksen avulla voidaan osoittaa (mikä ei kuulu tähän tehtävään), että jos* $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *niin myös* $\hat{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *osoittamalla, että jos* $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *niin* $\int_{-\infty}^{\infty}|t^j s^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ *kaikilla* $j,k \geq 0$.

Vastaa Stack-tehtäviin (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=16`)
viimeistään 13.1.2014 kl. 14.00
