Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi
Harjoitus 1
8-10.1.2014, viikko 2

Gripenberg, Ruponen, Saari

P1. Esitä funktiot $\cos(t)$ ja $\sin(t)$ funktioiden $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ja $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ avulla ja laske näiden tulosten avulla $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t$ kun $a > 0$.

Vihje: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$, *funktion* $t \mapsto \mathrm{e}^{ct}$ *integraalifunktio on* $\frac{1}{c}\mathrm{e}^{ct}$ *kun* $c \neq 0$ *myös kun* c *on kompleksiluku ja* $\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{ct} = 0$ *jos (ja vain jos)* $\mathrm{Re}\,(c) < 0$.

Ratkaisu: Koska

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} &= \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t),\\
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} &= \cos(-t) + \mathrm{i}\sin(-t),
\end{aligned}$$

ja $\cos(-t) = \cos(t)$ ja $\sin(-t) = -\sin(t)$ niin laskemalla yhteen ja vähentämällä saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} &= 2\cos(t),\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} &= 2\mathrm{i}\sin(t).
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right),\\
\sin(t) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right).
\end{aligned}$$

Jälkimmäisen tuloksen avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-(a-b\mathrm{i})t} - \mathrm{e}^{-(a+b\mathrm{i})t}\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \Big/_0^\infty \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{-(a-b\mathrm{i})}\mathrm{e}^{-(a-b\mathrm{i})t} - \frac{1}{-(a+b\mathrm{i})}\mathrm{e}^{-(a+b\mathrm{i})t}\right)\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{a-b\mathrm{i}} - \frac{1}{a+b\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{a+b\mathrm{i}-(a-b\mathrm{i})}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

P2. Laske funktion h Fourier-muunnos $\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}h(t)\,\mathrm{d}t$ kun $h(t) = 1$ kun $|t| \leq \frac{1}{2}$ ja $h(t) = 0$ kun $|t| > \frac{1}{2}$. Päteekö $\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{h}(\nu)|\,\mathrm{d}\nu < \infty$? Entä $\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{h}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu < \infty$ ja $\lim_{|\nu|\to\infty}\hat{h}(\nu) = 0$?

Vastaus: $\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$

Ratkaisu: Fourier-muunnoksen ja funktion h määritelmistä seuraa, että

$$\hat{h}(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\cdot 1\,\mathrm{d}t = \Big/_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{-\mathrm{i}2\pi\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} = \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi\nu}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}\right) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}.$$

Usein kirjoitetaan $\mathrm{sinc}\,(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ mutta sinc määritellään joskus myös kaavalla $\frac{\sin(\nu)}{\nu}$.

Jos $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\nu)| \, \mathrm{d}\nu < \infty$ niin Fourier-muunnoksen käänteiskaavasta seuraisi, että h olisi jatkuva, ja koska se ei ole, niin $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\nu)| \, \mathrm{d}\nu = \infty$.

Sen sijaan pätee kyllä $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\nu)|^2 \, \mathrm{d}\nu < \infty$ ja $\lim_{|\nu|\to\infty} \hat{h}(\nu) = 0$ koska $|\hat{h}(\nu)| \le \min\{1, \frac{1}{\pi|\nu|}\}$.

P3. Olkoon (kuten tehtävässä P2) $h(t) = 1$ kun $|t| \le \frac{1}{2}$ ja $h(t) = 0$ kun $|t| > \frac{1}{2}$.

(a) Laske funktio $q(t) = (h * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)h(\tau) \, \mathrm{d}\tau$. (Tarkastele erikseen tapaukset $t < -1$, $-1 \le t \le 0$, $0 < t \le 1$ ja $t > 1$.)

(b) Laske $\hat{q}(\nu)$ käyttäen hyväksi tulos jonka mukaan konvoluution Fourier-muunnos on tekijöiden Fourier-muunnosten tulo ja tehtävän P2 tulosta.

Vastaus: (a) $\max\{0, 1 - |t|\}$

Ratkaisu: (a) Määritelmän mukaan

$$q(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau,$$

ja koska $|t - \tau| > \frac{1}{2}$ kun $|t| > 1$ ja $|\tau| \le \frac{1}{2}$ niin nähdään , että $q(t) = 0$ kun $t < -1$ tai $t > 1$.

Nyt $t - \tau \ge -\frac{1}{2}$ kun $\tau \le t + \frac{1}{2}$ ja $t - \tau \le \frac{1}{2}$ kun $\tau \ge t - \frac{1}{2}$. Jos $-1 \le t \le 0$ niin $t + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$ ja $t - \frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}$ joten

$$q(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} 1 \, \mathrm{d}\tau = 1 + t, \quad -1 \le t \le 0.$$

Jos $0 < t \le 1$ niin $t + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ ja $t - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ joten

$$q(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \, \mathrm{d}\tau = 1 - t, \quad 0 < t \le 1.$$

Näin ollen

$$q(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1, \\ 1 + t, & -1 \le t \le 0, \\ 1 - t, & 0 < t \le 1. \end{cases}$$

(b) Koska konvoluution Fourier-muunnos on tekijöiden Fourier-muunnosten tulo niin tehtävän P2 tuloksen perusteella

$$\hat{q}(\nu) = \hat{h}(\nu)^2 = \frac{\sin(\pi\nu)^2}{\pi^2\nu^2}.$$

P4. Funktion g Laplace muunnos määritellään kaavalla

$$\mathcal{L}(g)(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-zt} g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Esitä Laplace-muunnos Fourier-muunnoksen avulla, ja anna käänteiskaava Laplace-muunnokselle käyttäen hyväksi Laplace-muunnoksen arvot $\mathcal{L}(g)(\sigma + \mathrm{i}y)$, $y \in \mathbb{R}$. Voit olettaa, että tämä funktio on integroituva.

Vihje: Funktio $\nu \mapsto \mathcal{L}(g)(\sigma + \mathrm{i}2\pi\nu)$ on tietyn funktion Fourier-muunnos. Esitä tämä funktio Fourier-muunnoksen käänteiskaavan avulla.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan

$$\mathcal{L}(g)(\sigma + \mathrm{i}2\pi\nu) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{e}^{-\sigma t} g(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{g_\sigma}(\nu),$$

missä $g_\sigma(t) = \mathrm{e}^{-\sigma t} g(t)$ kun $t \geq 0$ ja $g_\sigma(t) = 0$ kun $t < 0$. Fourier-muunnoksen käänteiskaavan avulla saadaan (olettaen, että tarvittavat oletukset ovat voimassa)

$$\mathrm{e}^{-\sigma t} g(t) = g_\sigma(t) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathcal{L}(g)(\sigma + \mathrm{i}2\pi\nu)\,\mathrm{d}\nu,$$

ja kun kerrotaan molemmat puolet $\mathrm{e}^{\sigma t}$:llä ja tehdään muuttujan vaihto $2\pi\nu = y$ saadaan (koska $\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}y$),

$$g(t) = \frac{\mathrm{e}^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\mathcal{L}(g)(\sigma + \mathrm{i}y)\,\mathrm{d}y.$$

P5. Osoita, että jos s on äärettömän monta kertaa derivoituva ja $\sup_{t\in\mathbb{R}}|t^j s^{(k)}(t)| < \infty$ kaikilla $j, k \geq 0$, (jolloin merkitään $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) niin $\nu^j \hat{s}^{(k)}(\nu)$ on funktion $(-1)^k(\mathrm{i}2\pi)^{k-j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left(t^k s(t)\right)$ Fourier-muunnos esim. seuraavalla tavalla:

(a) Määrittele funktio $g_{j,k}$ kaavalla $g_{j,k}(t) = (-1)^k(\mathrm{i}2\pi)^{k-j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left(t^k s(t)\right)$ ja osoita osittaisintegroinnilla, että $\widehat{g_{j,k}}(\nu) = \nu\widehat{g_{j-1,k}}(\nu)$.

(b) Esitä $\widehat{g_{j,k}}(\nu)$ funktion $\widehat{g_{0,k}}(\nu)$ avulla.

(c) Laske $\hat{s}^{(k)}(\nu)$.

(d) Käytä hyväksi kohtien (b) ja (c) tuloksia.

Huom! *Tämän tuloksen avulla voidaan osoittaa (mikä ei kuulu tähän tehtävään), että jos $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin myös $\hat{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ osoittamalla, että jos $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ niin $\int_{-\infty}^\infty |t^j s^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ kaikilla $j, k \geq 0$.*

Ratkaisu: (a) Osittaisintegroinnilla sadaan:

$$\begin{aligned}\widehat{g_{j,k}}(\nu) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}(-1)^k(\mathrm{i}2\pi)^{k-j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left(t^k s(t)\right)\,\mathrm{d}t \\ = \Big/_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}(-1)^k(\mathrm{i}2\pi)^{k-j}\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}t^{j-1}}\left(t^k s(t)\right) \\ + \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\nu(-1)^k(\mathrm{i}2\pi)^{k+1-j}\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}t^{j-1}}\left(t^k s(t)\right)\,\mathrm{d}t = \nu\widehat{g_{j-1,k}}(\nu).\end{aligned}$$

(b) Induktiolla saadaan $\widehat{g_{j,k}}(\nu) = \nu^j\widehat{g}_{0,k}(\nu)$.

(c) Siirtämällä derivointi integraalin alle todetaan, että

$$\hat{s}^{(k)}(\nu) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}(-\mathrm{i}2\pi t)^k s(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{g_{0,k}}(\nu).$$

(d) Yhdistämällä (b) ja (c) kohtien tuloksia saadaan

$$\nu^j\hat{s}^{(k)}(\nu) = \nu^j\widehat{g_{0,k}}(\nu) = \widehat{g_{j,k}}(\nu),$$

ja saadaan haluttu väite.
