Aalto-universitetet

MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik — Gripenberg
Övning 5
Vecka 6, 2–6.2.2015

Besvara Stack-uppgifterna (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=18`)
senast 9.2.2015 kl. 12.00.

Lämna in lösningarna till I-uppgifterna senast 9.2.2015 kl. 12.00.
Kom ihåg att skriva ditt namn och studentnummer!

I1. Under åren 2007 och 2008 uppmättes vid samma tidpunkter under året följande vattentemperaturer i Ule träsk :

2007	5.3	8.5	11.8	17.9	15.2	16.1	15.8	17.2	18.9	22.1	18.2	13.9	11.2
2008	5.5	4.1	13.1	11.1	16.1	15.8	13.0	18.1	17.4	14.4	15.6	13.1	11.0

Finns det någon signifikant skillnad mellan temperaturerna dessa år. Använd signifikansnivån 0.05. Du kan inte anta att temperaturerna under ett år är observationer av samma slumpvariabel, men däremot kan det vara en god idé att räkna skillnaderna mellan mätvärdena de olika åren vid samma tidpunkt.

I2. Antag att vi går tillväga på följande (felaktiga) sätt. Vi tar ett observerat stickprov $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$ av en $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ fördelad slumpvariabel och räknar ut medelvärdet $\overline{x}$ och stickprovsvariansen s^2. Ifall $\overline{x} > \mu_0$ så tar vi som nollhypotes $\mathrm{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ och i andra fall tar vi som nollhypotes $\mathrm{H}_0 : \mu \geq \mu_0$, (och felet består i att vi låter nollhypotesen bero på det observerade stickprovet). Sedan testar vi nollhypotesen på normalt sätt på signifikansnivån 0.01. Vad är sannolikheten att vi förkastar nollhypotesen om $\mu = \mu_0$? Vad är denna sannolikhet om stickprovets storlek är n och signifikansnivån α istället för 0.01?
Ledning: Antag först att $\overline{x} > \mu_0$. Bestäm det kritiska värdet för testet, dvs. ett tal A så att om testvariabeln $w = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} > A$ så förkastas nollhypotesen $\mu \leq \mu_0$ på signifikansnivån 0.01. *Om sedan $\overline{x} < \mu_0$ så blir motsvarande kritiska värde på grund av symmetrin $-A$, dvs. nollyhoptesen (som nu är $\mu \geq \mu_0$) förkastas på signifikansnivån* 0.01 *om testvariabeln $w < -A$. Bestäm sedan sannolikheten för att testvariabeln w får ett värde som ligger i mängden $(-\infty, -A) \cup (A, \infty)$ så att nollhypotesen förkastas eftersom $w > A$ innebär att $\overline{x} > \mu_0$ och $w < -A$ innebär att $\overline{x} < \mu_0$.*

I3. Vi kastar en tärning 180 gånger och får n_k gånger resulatet k enligt följande tabell:

Resultat	1	2	3	4	5	6
n_k	41	22	20	36	36	25

Är tärningen felfri, dvs. är alla resultat lika sannolika? Testa med χ^2-testet på signifikansnivån 0.01.

I4. I samband med en kvalitetskontroll av en viss produkt skall vi testa nollhypotesen $\mathrm{H}_0 : p \leq 0.06$ på signifikansnivån 0.05 på ett stickprov med storleken 500 av en Bernoulli(p)-fördelad slumpvariabel (som får värdet 1 om kvalitetskraven på produkten inte uppfylls, annars 0) genom att använda normalapproximation. Vad är sannolikheten att nollhypotesen inte förkastas fast värdet av p i verkligheten är 0.08. Använd också för denna del normalapproximation.

Ledning: Bestäm talet A så att nollhypotesen förkastas om minst A exemplar i stickprovet inte uppfyller kvalitetskraven och bestäm sedan sannolikheten för att färre än A stycken av produkterna i stickprovet inte uppfyller kvalitetskraven.

Svar: 0.37

I5. Antag att $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Vad är sannolikheten att nollhypotesen $H_0 : \sigma^2 \leq 3$ förkastas på signikansnivån 0.01 om i verkligheten $\sigma^2 = 5$ (dvs. man drar rätt slutsats) och hypotesen testas med ett stickprov med storleken 60?

Ledning: Bestäm det kritiska värdet A så att nollhypotesen förkastas om $s^2 > A$ (då $n = 60$) och beräkna sedan sannolikheten för att stickprovsvariansen $S^2 > A$ om $X \sim \mathrm{N}(\mu, 5)$ och $n = 60$. Kom ihåg vad man vet om fördelningen av stickprovsvariansen for normalfördelade slumpvariabler!

Svar: 0.72