Aalto-universitetet

MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik — Gripenberg
Övning 1
Vecka 2, 5–9.1.2015

I1. En vanlig tärning kastas två gånger. Utfallsrummet är då

$$\Omega = \{\, (x,y) : x = 1,2,3,4,5,6 \text{ och } y = 1,2,3,4,5,6 \,\}.$$

Låt

$$\begin{aligned} A &= \{\text{"I första kaster fås minst 5"}\}, \\ B &= \{\text{"I (åtminstone) ett av kasten är resulatet 6"}\}, \\ C &= \{\text{"Summan av resultaten är högst 8"}\}. \end{aligned}$$

Bestäm sannolikheterna för följande händelser:

$$(a) \quad A \cap B, \qquad (b) \quad A \cup C, \qquad (c) \quad B^c, \qquad (d) \quad C \setminus B.$$

Använd den klassiska definitionen av sannolikhet, dvs. anta att alla element i utfallsrummet är lika sannolika.

Ledning: Behandla utfallsrummet som ett 6×6 *rutfält och rita var och en av de mängder som förekommer här i ett skilt rutfält.*

Lösning: Händelserna A, B och C kan beskrivas med följande diagram där resulatet av det första kastet ges på den lodräta axeln och av det andra kastet på den vågräta axeln:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & & & \mathrm{x} \\ \hline & & & & & \mathrm{x} \\ \hline & & & & & \mathrm{x} \\ \hline & & & & & \mathrm{x} \\ \hline & & & & & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \end{array} \qquad C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & & & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & & & & \\ \hline \end{array}$$

Nu får vi följande kombinationer av dessa mängder:

$$A \cap B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Pr(A \cap B) = \frac{7}{36}.$$

$$A \cup C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Pr(A \cup C) = \frac{33}{36}.$$

$$B^c = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Pr(B^c) = \frac{25}{36}.$$

$$C \setminus B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & & \\ \hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Pr(C \setminus B) = \frac{22}{36}.$$

I2. En person har två barn med olika ålder och vi antar att barnens kön är oberoende och det är lika sannolikt att ett barn är en flicka som att det är en pojke. Vad är sannolikheten att båda barnen är flickor om

(a) åtminstone ett av barnen är en flicka,
(b) det yngre barnet är en flicka.

Ledning: Vad är utfallsrummet?

Lösning: Utfallsrummet är $\{FF, FP, PF, PP\}$ och av antagandena följer att sannolikheten för varje elementarhändelse är $\frac{1}{4}$. Händelsen att båda barnen är flickor är $BF = \{FF\}$, händelsen att åtminstone ett av barnen är en flicka är $EF = \{FF, FP, PF\}$ och händelsen att det yngre barnet är en flicka är $YF = \{FF, FP\}$ om vi skriver det yngre barnet först.

(a)

$$\Pr(BF|EF) = \frac{\Pr(BF \cap EF)}{\Pr(EF)} = \frac{\Pr(BF)}{\Pr(EF)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\Pr(BF|YF) = \frac{\Pr(BF \cap YF)}{\Pr(YF)} = \frac{\Pr(BF)}{\Pr(YF)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

I3. I ett kommunikationssystem används de binära talen 1 och 0. Av alla tal som skickas är 60% ettor och 40% nollor. Det finns störningar i kommunikationerna som ändrar ettor till nollor och tvärtom och man uppskattar att sannolikheten för att en etta kommer fram som en etta är 0.7 och sannolikheten för att en nolla kommer fram som en nolla är 0.9. Bestäm sannolikheterna för att

(a) en etta har skickats om en etta har kommit fram,
(b) en nolla har skickats om en nolla har kommit fram.

Svar: 0.913 och 0.66667

Lösning: För att tillämpa Bayes formel definierar vi först händelserna S_1 och S_0 att en etta respektive en nolla skickats och händelserna M_1 och M_0 att en etta respektive nolla mottagits. Av de givan uppgifterna följer nu att

$$\begin{aligned}
\Pr(S_1) &= 0.6, \\
\Pr(S_0) &= 0.4, \\
\Pr(M_1|S_1) &= 0.7, \\
\Pr(M_0|S_1) &= 1 - 0.7 = 0.3, \\
\Pr(M_0|S_0) &= 0.9 \\
\Pr(M_1|S_0) &= 1 - 0.9 = 0.1.
\end{aligned}$$

Med Bayes formel får vi nu

$$\begin{aligned}
\Pr(S_1|M_1) &= \frac{\Pr(M_1|S_1)\Pr(S_1)}{\Pr(M_1|S_1)\Pr(S_1) + \Pr(M_1|S_0)\Pr(S_0)} \\
&= \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.7 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4} = \frac{0.42}{0.46} \approx 0.913
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\Pr(S_0|M_0) &= \frac{\Pr(M_0|S_0)\Pr(S_0)}{\Pr(M_0|S_0)\Pr(S_0) + \Pr(M_0|S_1)\Pr(S_1)} \\
&= \frac{0.9 \cdot 0.4}{0.9 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6} = \frac{0.36}{0.54} = 0.66667,
\end{aligned}$$

Ett annat sätt att komma till samma resultat är att anta att vi skickar 1000 tecken, varav 600 är ettor och 400 nollor. Av ettorna kommer $0.7 \cdot 600 = 420$ fram som ettor och resten $0.3 \cdot 600 = 180$ fram som nollor. Av nollorna kommer $0.9 \cdot 400 = 360$ fram som nollor och resten $0.1 \cdot 400 = 40$ fram som ettor. Av de $420 + 40 = 460$ ettorna som mottagits är det 420 som sickats som ettor så svaret i punkt (a) är $\frac{420}{440} = 0.913$ och av de $360 + 180 = 540$ nollor som mottagits är det 360 som skickats som nollor så svaret på frågan i punkt (b) är $\frac{360}{540} = 0.66667$.

I4. Du skall resa med flyg från Helsingfors till Ouagadougou via Stockholm och Paris. I Helsingfors är sannolikheten att du försenar dig från flyget (och alltså inte alls kommer vidare) 5%, i Stockholm (förutsatt att du kommit dit) 10% och i Paris (igen förutsatt att du kommit så långt) 15%.

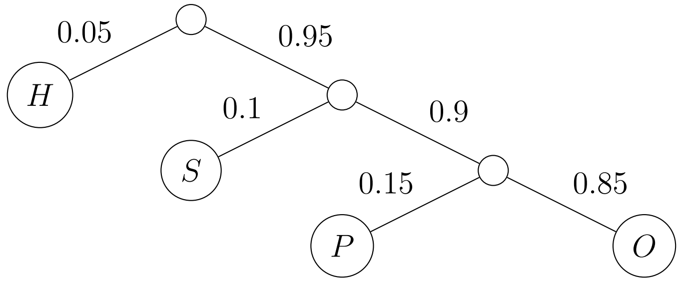
(a) Vad är sannolikheten att du kommer fram till Ougadougou?
(b) Vad är sannolikheten att du blir i Stockholm?
(c) Vad är sannolikheten att du blir i Stockholm förutsatt att du inte kommer fram till Ougadougou?

Det kan vara en god idé att använda ett träddiagram!

Svar: 0.72675, 0.095, ≈ 0.3477.

Lösning: Låt H vara händelsen att du försenar dig i Helsingfors och blir där, S händelsen att du blir i Stockholm, dvs. hinner till planet i Helsingfors men försenar dig i Stockholm, P händelsen att du hinner till planen i Helsingfors och Stockholm men försenar dig i Paris och O händelsen att du kommer fram till Ougadougou.

Situationen kan beskrivas med ett träddiagram på följande sätt:



(a) Genom att multiplicera sannolikheterna för de bågar som leder till noden O så får vi $\Pr(O) = 0.95 \cdot 0.9 \cdot 0.85 = 0.72675$.

(b) På samma sätt ser vi att $\Pr(S) = 0.95 \cdot 0.1 = 0.095$.

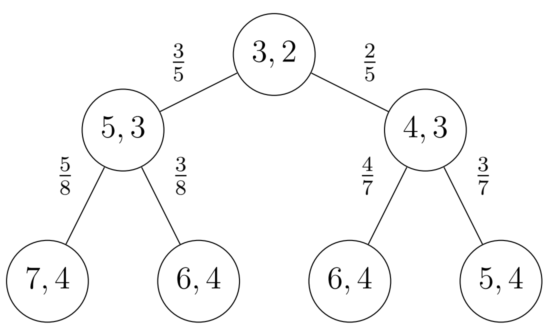
(c) Enligt definitionen av betingad sannolikhet får vi till slut, eftersom $S \subset O^c$, att

$$\Pr(S|O^c) = \frac{\Pr(S \cap O^c)}{\Pr(O^c)} = \frac{\Pr(S)}{1 - \Pr(O)} = \frac{0.095}{1 - 0.72675} \approx 0.3477.$$

I5. I en urna finns 3 vita och 2 svarta bollar. Vi plockar slumpmässigt en boll ur urnan. Om den är vit så lägger vi tillbaka i urnan 3 vita bollar och 1 svart boll och om den är svart så lägger vi tillbaka i urnan 2 svarta bollar och 1 vit boll. Sedan plockar vi igen slumpmässsigt en boll ur urnan och gör på samma sätt, dvs. om den är vit så lägger vi tillbaka i urnan 3 vita bollar och 1 svart boll och om den är svart så lägger vi tillbaka i urnan 2 svarta bollar och 1 vit boll. Bestäm sannolikheten för att det finns högst 6 vita bollar i urnan efter detta.

Svar: $\frac{5}{8}$

Lösning: Träddiagrammet ser ut på följande sätt där talen m, n i noderna betyder att det i urnan finns m vita och n svarta bollar, bågen nedåt till vänster väljs om vi plockar en vit boll den nedåt till höger om vi plockar en svart boll och siffrorna ovanför bågarna är sannolikheten för att den bågen väljs:



Eftersom sannolikheten för att man kommer till en viss nod på den sista raden fås genom att multiplicera sannolikheterna för bågarna som leder till denna nod så ser vi att sannolikheten för att det finns högst 6 vita bollar i urnan är sannolikheten för att det inte finns 7 bolla i urnan, dvs.

$$1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$
