Aalto-universitetet

MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik — Gripenberg/Metsalo
Övning 2
Vecka 3, 13–17.1.2014

Returnera lösningarna till I-uppgifterna senast 20.1.2014 kl. 12.00
Kom ihåg att skriva ditt namn och studentnummer!

I1. Följande uppgifter finns om tillförlitligheten hos en lögndetektor: En lögnare blir korrekt klassificerade som en sådan med sannolikheten 0.9 och en person som inte ljuger blir felaktigt klassificerad som en lögnare med sannolikheten 0.05. Antag att lögndetektorn används på en befolkning av vilka 2% ljuger. Vad är sannolikheten för att en person som klassificerats som en lögnare inte är det?

I2. Du deltar i en frågetävling och sannolikheten att du svarar rätt på den första frågan är 0.5. Om du svarat rätt får du ännu två frågor på vilka du kan svara rätt med sannolikheten 0.5. Om du svarar fel på den första frågan får du en tilläggsfråga som du kan svara rätt på med sannolikheten 0.75 och om du svarar fel på denna tilläggsfråga är tävling slut för din del men om du svarar rätt får du en tredje fråga på vilken du kan svara rätt med sannolikheten 0.25. Bestäm frekvensfunktionen och väntevärdet för antalet rätta svar. Använd dig av ett trädnätverk!

Svar: ≈ 1.47

I3. Anta att du vill köpa en vara som finns att få i endast två butiker och att du dessutom har bråttom så att när du kommit till den första butiken och ser vad priset X är är i den så måste du antingen köpa varan för det priset eller gå till den andra och köpa varan för priset Y. Eftersom du inte känner till priserna är det enda du kan anta att X och Y är oberoende och har samma fördelning, tex. med täthetsfunktionen f.

(a) Om du med sannolikheten $\frac{1}{2}$ köper varan i den första butiken och med sannolikheten $\frac{1}{2}$ i den andra så är sannolikheten att du köper den för det billigare priset $\frac{1}{2}\Pr(X \leq Y) + \frac{1}{2}\Pr(Y \leq X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_x^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\int_y^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}y$. Visa att detta uttryck är $\frac{1}{2}$.

(b) Ett alternativ är att i förväg bestämma en gräns a och sedan köpa varan i den första butiken om priset X där är högst a och i annat falla köpa varan för priset Y i den andra butiken. Sannolikheten för att du köper den för det billigare priset är då

$$p = \Pr\big((X \leq a \text{ och } X \leq Y) \quad \text{eller} \quad (X > a \text{ och } Y \leq X)\big).$$

Uttryck p med hjälp av fördelningsfunktionen $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) När är $p \geq \frac{1}{2}$? När är p som störst?

Ledning: Kom ihåg att $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$

I4. En 4 m lång käpp delas i en slumpmässigt vald punkt och man bildar en rätvinklig triangel med käppens delar som kateter. Slumpvariabeln A är arean av denna triangel.

(a) Bestäm A:s väntevärde.

(b) Är det en god idé att beräkna areans väntevärde genom att anta att käppen bryts i brytningspunktens väntevärde?

I5. Antag att en viss sorts lampor fungerar under en tid som är exponentialfördelad med parametern λ och att dessa livslängder hos olika lampor är oberoende av varandra. Antag också att då en lampa gått sönder byts den genast ut mot en ny (hel) lampa. Antag nu att det sker exakt ett sådant lampbyte i tidsintervallet $[0, T]$. Vad är då fördelningen av tidpunkten för detta lampbyte? (Det är en följd av exponentialfördelningens egenskaper att livslängden av den lampa som används vid tidpunkten 0 kan räknas från denna tidpunkt.)

Besvara Stack-uppgifterna (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=18`)
senast 20.1.2014 kl. 12.00
