MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik
Exempel, del I

G. Gripenberg

Aalto-universitetet

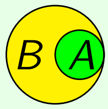
26 januari 2015

Slumpmässigt försök, utfallsrum, elementarhändelse, händelse, sannolikhet

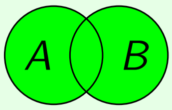
- **Slumpmässigt försök**: *Vi kastar en tärning en gång.*
- **Utfallsrum**: *Resultatet av det slumpmässiga försöket är ett heltal mellan* 1 *och* 6*. Utfallsummet är mängden av alla resultat, dvs. mängden* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Händelse**: *Varje delmängd av utfallsrummet, tex.* $\{2, 4, 6\}$ *är en händelse. En händelse inträffar om resultatet av försöket hör till händelsen.*
- **Elementarhändelse**: *Varje element* 1, 2, 3, 4, 5 *och* 6 *i utfallsrummet är en elementarhändelse.*
- **Sannolikhet**: *I dethär fallet är det naturligt att anta att sannolikheten för händelsen* A *är* $\Pr(A) = \frac{|A|}{6}$ *där* $|A|$ *är antalet element i* A *men det är inte enda möjligheten!*

En kort repetition i mängdlära

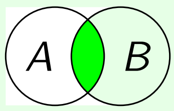
- $\omega \in A$ *om* ω *hör till mängden* A*, dvs.* ω *är ett element i* A.
- *Delmängd:* $A \subset B$ *om varje element i* A *också är ett element i* B*, dvs. "händelsen* B *inträffar om händelsen* A *inträffar".*



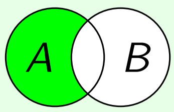
- *Union:* $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ eller } \omega \in B\}$*, dvs. "händelsen* A *inträffar* **eller** *händelsen* B *inträffar (eller båda inträffar)".*



- *Snitt:* $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ och } \omega \in B\}$*, dvs. "händelsen* A *inträffar* **och** *händelsen* B *inträffar".*

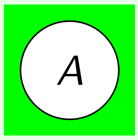


- *Differens:* $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ men } \omega \notin B\}$ *dvs. "händelsen* A *inträffar men händelsen* B *inträffar inte".*



En kort repetition i mängdlära, forts.

- *Komplement* $A^c = \Omega \setminus A = \{\, \omega \in \Omega : \omega \notin A \,\}$, *dvs. "händelsen A inträffar inte".*



- *Tom mängd:* $\emptyset$ *är den tomma mängden som inte innehåller något element alls. Två mängder eller händelser sägs vara disjunkta om* $A \cap B = \emptyset$, *dvs. om de inte har några gemensamma element.*
- *Numrerbar union:* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{\, \omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ för något } j \geq 1 \,\}$, *dvs. "åtminstone någon av händelserna* A_j *inträffar".*

Obs!

Då Ω *innehåller ändligt många element är det naturligt att att alla delmängder av* Ω *är händelser men i allmänhet är detta inte alltid möjligt eller ens önskvärt och då är* Pr *en funktion definierad i en* σ*-algebra* $\mathcal{A}$ *i* Ω, *dvs en mängd* $\mathcal{A}$ *med följande egenskaper:*

- $A \in \mathcal{A} \to A \subset \Omega$,
- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \to \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
- $A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, 2, \ldots \to \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Oberoende

Vi kastar en vanlig tärning två gånger. Då är utfallsrummet $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ *där* $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *är utfallsrummen för det första och det andra kastet så att* $\Omega = \{\, (j, k) : j, k = 1, 2, 3, 5, 6 \,\}$. *Om A är händelsen* {" 2 *eller* 3 *i första kastet*"} *och B är händelsen* {" 3, 4 *eller* 5 *i andra kastet*"} *så är det intuitivt klart att A och B är oberoende. Detta kan också beskrivas på följande sätt:*

$A =$

x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x

$B =$

		x	x	x	
		x	x	x	
		x	x	x	
		x	x	x	
		x	x	x	
		x	x	x	

Vi ser alltså att $A = \{2, 3\} \times \Omega_2$ *och* $B = \Omega_1 \times \{3, 4, 5\}$ *och* $\Pr(A) = \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ *och* $\Pr(B) = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 6} = 1 \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Oberoende, forts.

Händelsen $A \cap B$ kan beskrivas på följande sätt

$$A \cap B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & & x & x & x & \\ \hline & & x & x & x & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}$$

och

$$\Pr(A \cap B) = \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \Pr(A) \cdot \Pr(B),$$

dvs. händelserna A och B är oberoende.
De enklaste fallen då man har oberoende händelser är av denna typ, dvs. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ och $\Pr(A_1 \times B_2) = \Pr_1(A_1) \cdot \Pr_2(B_2)$ då $A_1 \subset \Omega_1$ och $B_2 \subset \Omega_2$ för då blir $A = A_1 \times \Omega_2$ och $B = \Omega_1 \times B_2$ oberoende.

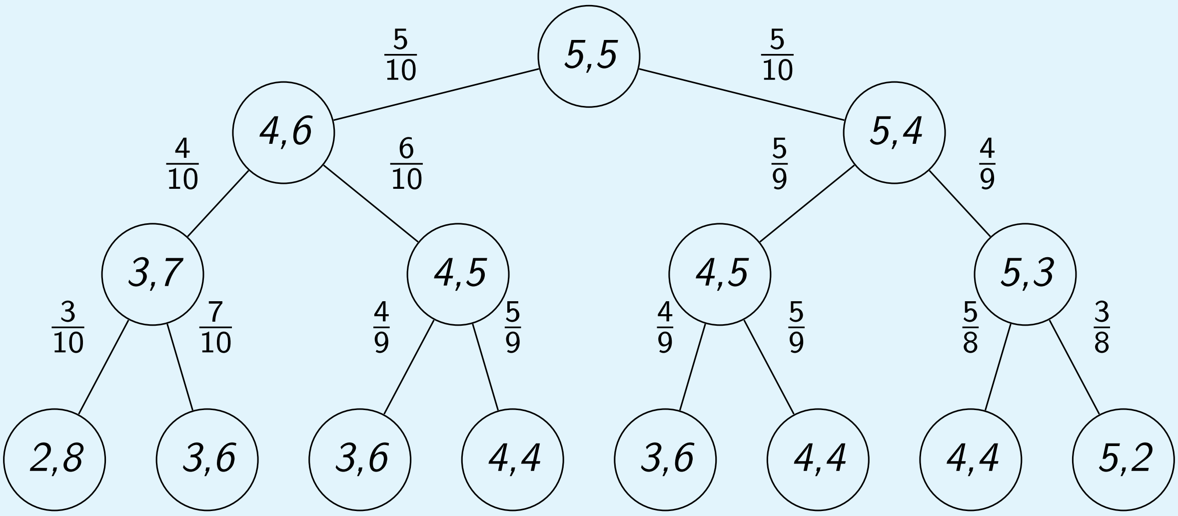
Oberoende

Vi singlar slant två gånger och låter A_1, A_2 och A_3 vara följande händelser: $A_1 = \{$ "Första kastet krona" $\}$, $A_2 = \{$ "Andra kastet krona" $\}$ och $A_3 = \{$ "Ena kastet (men inte båda kasten) krona" $\}$. Vilka av dessa händelser är oberoende och vilka inte?
Utfallsrummet är i dethär fallet $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ där H är krona och T klave. Då är $A_1 = \{HH, HT\}$, $A_2 = \{HH, TH\}$ och $A_3 = \{HT, TH\}$. Om vi nu antar att vi har en vanlig slant så kan vi anta att sannolikheten för händelsen $A \subset \Omega$ är $\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ så att
$\Pr(A_1) = \Pr(A_2) = \Pr(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ *och* $\Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(\{HH\}) = \frac{1}{4}$,
$\Pr(A_1 \cap A_3) = \Pr(\{HT\}) = \frac{1}{4}$ *och* $\Pr(A_2 \cap A_3) = \Pr(\{TH\}) = \frac{1}{4}$.
Av detta ser vi att händelserna A_i och A_j är oberoende då $i, j \in \{1, 2, 3\}$ och $i \neq j$ för då är $\Pr(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = \Pr(A_i) \cdot \Pr(A_j)$.
Men $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \Pr(\emptyset) = 0 \neq \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2) \cdot \Pr(A_3)$ så att händelserna A_1, A_2 och A_3 är inte oberoende utan bara parvis oberoende.

Träddiagram som hjälpmedel

I en urna finns 5 *vita och* 5 *svarta kulor. Vi plockar slumpmässigt en kula ur urnan och om den är vit lägger vi en svart kula i urnan (och vi lägger alltså inte tillbaka den vita kulan) och om den är svart lägger vi inte någon kula i urnan. Vi upprepar denna procedur ännu två gånger. Vad är sannolikheten att att det efter detta finns* 6 *svarta kulor i urnan?*
Här kan vi använda produktregeln för den betingade sannolikheten men det är enklast om vi ritar ett träd där vi väljer bågen nedåt till vänster om vi plockar en vit kula och bågen nedåt till höger om vi plockar en svart kula. I varje nod skriver vi antalet vita och svarta kulor och vid varje båge skriver vi (den betingade) sannolikheten att den väljs då det i urnan finns de antal vita och svarta kulor som nodens siffror anger. Då ser trädet ut på följande sätt:

Träddiagram som hjälpmedel, forts.



Av diagrammet ser vi att det i 3 *fall finns* 6 *svarta kulor i urnan och sannolikheter för att komma till en viss nod får vi genom att multiplicera sannoikheterna för de bågar som leder till denna nod med varandra. Svaret får vi sedan genom att addera dessa sannolikheter:*

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1607}{4050}\approx 0.4.$$

Bayes formel: Exempel

I ett land bor två lika stor stammer, lögnarna och skurkarna. Av lögnarna svarar 40% *och av skurkarna* 80% *sanningsenligt på alla frågor. Du träffar på en invånare i landet och frågar om hen är en lögnare eller en skurk och hen säger sig vara en lögnare. Vad är sannolikheten att hen verkligen är en lögnare?*

Vi antar för enkelhetens skull att det bor sammanlagt 1000 *lögnare och* 1000 *skurkar i landet. Då vet vi att* 400 *av lögnarna svarar sanningsenligt och säger sig vara lögnare. Av skurkarna far* 200 *fram med osanningar och säger sig också vara lögnare. Dethär betyder att sammanlagt* 600 *personer säger sig vara lögnare och av dessa är* 400 *verkligen lögnare så att sannolikheten att den person du träffat verkligen är en lögnare är* $\frac{400}{600} = \frac{2}{3}$.

Bayes formel: Exempel, version 2

I ett land bor två lika stor stammer, lögnarna och skurkarna. Av lögnarna svarar 40% *och av skurkarna* 80% *sanningsenligt på alla frågor. Du träffar på en invånare i landet och frågar om hen är en lögnare eller en skurk och hen säger sig vara en lögnare. Vad är sannolikheten att hen verkligen är en lögnare?*

Låt L *vara händelsen att du möter en lögnare och* S *händelsen att du möter en skurk. Enligt antagandet är* $\Pr(L) = \Pr(S) = 0.5$. *Låt* SL *vara händelsen att personen du träffat säger sig vara en lögnare så att vi vet att*

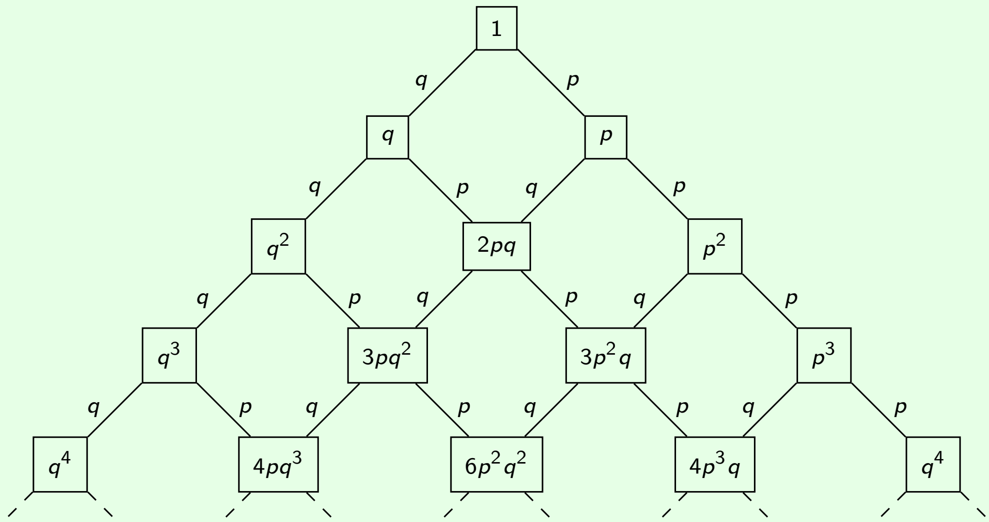
$$\Pr(SL|L) = 0.4 \quad och \quad \Pr(SL|S) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Nu skall vi räkna ut $\Pr(L|SL)$ *och med Bayes formel får vi*

$$\Pr(L|SL) = \frac{\Pr(SL|L)\Pr(L)}{\Pr(SL|L)\Pr(L) + \Pr(SL|S)\Pr(S)}$$
$$= \frac{0.4 \cdot 0.5}{0.4 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}.$$

Binomialfördelningen som träddiagram

Antag att vi upprepar ett experiment så att resultaten är oberoende, händelsen A inträffar med sannolikheten p och händelsen A^c med sannolikheten $q = 1 - p$. I följande träddiagram väljs en båge nedåt till höger väljs om händelsen A inträffar annars en båge nedåt till vänster och sannolikheten att händelsen A inträffar k gånger vid n upprepningar fås som summan av produkterna av sannolikheterna längs alla vägar med k steg till höger och $n - k$ till vänster, vilket ger $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.



Exponentialfördelningen

Vi säger att slumpvariabeln X har exponentialfördelningen med parametern λ, dvs. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ om den har fördelningsfunktionen

$$F_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Då har den täthetsfunktionen $f_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ då $t > 0$ och $f_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(t) = 0$ då $t < 0$.
En exponentialfördelad slumpvariabel "saknar minne" på så sätt att om $s, t \geq 0$ så gäller

$$\Pr(X > t + s \,|\, X > s) = \Pr(X > t),$$

dvs. en apparat som fungerar tiden X är som ny så länge den fungerar.
Varför? $\Pr(X > u) = \mathrm{e}^{-\lambda u}$ *och* $\{X > t+s\} \cap \{X > s\} = \{X > t+s\}$ *så att*

$$\Pr(X > t + s \,|\, X > s) = \frac{\Pr(X > t + s \text{ och } X > s)}{\Pr(X > s)} = \frac{\Pr(X > t+s)}{\Pr(X > s)}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda t} = \Pr(X > t).$$

Odds och Bayes formel

Antag att du deltar i ett hasardspel där du vinner och får en euro av din motspelare med sannolikheten p och förlorar och ger din motspelare v euro med sannolikheten $1-p$. För vilket värde på v är detta ett rättvist spel? Din vinst eller förlust är en slumpvariabel X som får värdet 1 med sannolikheten p och värdet $-v$ med sannolikheten $1-p$ och din motspelares vinst är $-X$. Vi kan säga att spelet är rättvist om väntevärdet av båda spelarnas vinst är 0, dvs. $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot p - v \cdot (1-p) = 0$ *så att*

$$v = \frac{p}{1-p},$$

som är spelets **odds** *för dig. Dethär begreppet dyker också upp i samband med Bayes formel på följande sätt: Om B är någon händelse så är oddsen för den* $\frac{\mathrm{Pr}(B)}{\mathrm{Pr}(B^c)} = \frac{\mathrm{Pr}(B)}{1-\mathrm{Pr}(B)}$. *Om vi vet att någon (annan) händelse A inträffat så får vi med hjälp av Bayes formel uppdaterade odds för händelsen B under villkor att A inträffat, dvs.*

$$\frac{\mathrm{Pr}(B|A)}{\mathrm{Pr}(B^c|A)} = \frac{\mathrm{Pr}(A|B)}{\mathrm{Pr}(A|B^c)} \cdot \frac{\mathrm{Pr}(B)}{\mathrm{Pr}(B^c)}.$$

Sankt Petersburgsparadoxen

Du får mot betalning delta i följande spel: En slant singlas tills det blir en krona. Om detta sker på det n:te gången så får du 2^n euro.
Hur mycket är du villig att betala för att få delta i spelet?
Sannolikheten att den första kronan kommer på det n:te kastet är 2^{-n} (enda möjligheten är att det blir $n-1$ klavor och sedan en krona), så att väntevärdet av vinsten blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \,\mathrm{Pr}(\textit{krona på n:te kastet}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Det finns många orsaker varför det inte är förnuftigt att betala vad som helst för att få delta i dethär spelet (eller att ens ge sig in i det) och dethär exemplet visar att väntevärdet inte kan tillämpas på alla situationer.

Chebyshevs olikhet

Om variansen av X är liten, vad är då sannolikheten att X avviker mycket från sitt väntevärde? Chebyshevs olikhet ger ett svar:

$$\Pr\left(|X-\mathrm{E}(X)|\geq c\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right)\leq\frac{1}{c^2},\quad c>1.$$

Varför? Låt $g(t)=1$ om $\frac{|t-\mathrm{E}(X)|}{c\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\geq 1$, dvs. om $|t-\mathrm{E}(X)|\geq c\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ och 0 annars. Detta betyder att $\mathrm{E}(g(X))=\Pr(|X-\mathrm{E}(X)|\geq c\sqrt{\mathrm{Var}(X)})$ eftersom $\mathrm{E}(\mathbf{1}_A(X))=\Pr(X\in A)$. Nu är $g(t)\leq\left(\frac{|t-\mathrm{E}(X)|}{c\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)^2$ eftersom $g(t)=0$ om $\left(\frac{|t-\mathrm{E}(X)|}{c\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)^2<1$ och annars 1 så att

$$\Pr\left(|X-\mathrm{E}(X)|\geq c\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right)=\mathrm{E}(g(X))\leq\mathrm{E}\left(\left(\frac{|X-\mathrm{E}(X)|}{c\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)^2\right)$$
$$=\frac{1}{c^2\mathrm{Var}(X)}\mathrm{E}\left((X-E(X))^2\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)}=\frac{1}{c^2}.$$

Summan av oberoende Poisson-fördelade slumpvariabler

Ifall $X_1\sim\mathrm{Poisson}(\lambda_1)$ och $X_2\sim\mathrm{Poisson}(\lambda_2)$ är oberoende slumpvariabler så är $X_1+X_2\sim\mathrm{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$.
Varför? Om X_1 och X_2 är oberoende slumpvariabler med värden i mängden $\{0,1,2,\ldots\}$ och som har frekvensfunktionerna f_{X_1} och f_{X_2} Poisson-antagandet används inte ännu) så är händelsen $\{X_1+X_2=n\}$ unionen av de disjunkta händelserna $\{X_1=k,\,X_2=n-k\}$, $k=0,1,\ldots,n$ så att

$$f_{X_1+X_2}(n)=\Pr(X_1+X_2=n)=\sum_{k=0}^{n}\Pr(X_1=k,\,X_2=n-k)$$
$$\overset{X_1\text{ och }X_2\text{ oberoende}}{=}\sum_{k=0}^{n}\Pr(X_1=k)\Pr(X_2=n-k)=\sum_{k=0}^{n}f_{X_1}(k)f_{X_2}(n-k).$$

Om nu $X_j\sim\mathrm{Poisson}(\lambda_j)$ så är $f_{X_j}(k)=\mathrm{e}^{-\lambda_j}\frac{\lambda_j^k}{k!}$ och

$$f_{X_1+X_2}(n)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda_j^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}\overset{\text{binomialformeln}}{=}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}.$$

Täthetsfunktionen för summan av oberoende Exp(λ)-slumpvariabler

Antag att $X_1, X_2, \ldots$ *är oberoende* Exp(λ) *fördelade slumpvariabler. Vi skall visa att slumpvariabeln* $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ *har täthetsfunktionen*

$$f_{Y_n}(t) = \begin{cases} \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

När $n = 1$ *så är* $n - 1 = 0$ *och vi har exponentialfördelningens täthetsfunktion och påståendet stämmer. Om vi antar att det stämmer stämmer då* $n = k$ *så får vi (eftersom* $Y_{k+1} = Y_k + X_{k+1}$ *och* Y_k *och* X_{k+1} *också är oberoende) att slumpvariablens* Y_{k+1} *täthetsfunktion är*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{k+1}}(t-s) f_{Y_k}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda s} s^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}s$$
$$= \lambda^{k+1} \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t \frac{1}{(k-1)!} s^{k-1}\,\mathrm{d}s = \lambda^{k+1} \mathrm{e}^{-\lambda t} \Big/_0^t \frac{1}{k!} s^k = \frac{\lambda^{k+1} \mathrm{e}^{-\lambda t} t^k}{k!},$$

och påståendet är en följd av induktionsprincipen.

Sambandet mellan exponential- och Poissonfördelningen

Antag nu att $T > 0$ *och* $U = \max\{\, n : Y_n \leq T \,\}$. *Nu är* $U = k$ *om och endast om* $Y_k \leq T$ *men* $Y_{k+1} > T$. *Om* A *är händelsen* $\{Y_k > T\}$ *och* $B = \{Y_{k+1} > T\}$ *så är* $A^c \cap B = B \setminus A$ *händelsen* $\{Y_k \leq T$ *och* $Y_{k+1} > T\}$ *dvs.* $\{U = k\}$ *och eftersom* $X_{k+1} \geq 0$ *så är* $A \subset B$ *och*

$$\Pr(U = k) = \Pr(B) - \Pr(A) =$$
$$= \int_T^{\infty} \frac{\lambda^{k+1} \mathrm{e}^{-\lambda t} t^k}{k!}\,\mathrm{d}t - \int_T^{\infty} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{\text{partiell integrering}}{=} -\Big/_T^{\infty} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda t} t^k}{k!} + \int_T^{\infty} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t$$
$$- \int_T^{\infty} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda T} (\lambda T)^k}{k!}.$$

Nu är U *är* Poisson(λ)*-fördelad för då* $k = 0$ *får vi*

$$\Pr(U = 0) = \Pr(X_1 > T) = \mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda T} (\lambda T)^0}{0!}.$$

Felintensitet

Ifall X är en slumpvariabel med täthetsfunktion f_X och fördelningsfunktion F_X så är dess felintensitet (felfrekvens är något annat)

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)},$$

så att

$$F_X(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\int_{-\infty}^{t} \lambda_X(s)\,\mathrm{d}s}$$

och *ifall λ_X är kontinuerlig från höger i punkten t,*

$$\lambda_X(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \Pr(X \in (t, t+h) \,|\, X > t),$$

dvs. om X är tiden som en apparat har fungerat och den har fungerat till tidpunkten t så är sannolikheten att den slutar fungera i nästa tidsintervall med längden h ungefär $\lambda_X(t)h$.
För exponentialfördelningen är alltså felintensiteten den positiva konstanten λ då $t \geq 0$ och 0 då $t < 0$.

Exempel

Antag att vi har möjlighet att ingå ett avtal med två olika motparter (tex. köpa mjölk i två olika butiker, ta ett mot ett erbjudet jobb) men med den begränsningen att när vi får vet de villkor den första motparten erbjuder så måste vi antingen acceptera dem utan att veta vad den andra kan erbjuda eller så acceptera den andra motpartens villkor.
Finns det någon bättre metod än att slumpmässigt välja vem vi ingår avtalet med eller att direkt välja någondera av dem?
Antag att det enda villkoret är "priset" och att i dethär fallet ett lägre pris är bättre. Dessutom antar vi att de båda priserbjudandena X och Y är oberoende positiva slumpvariabler som har samma fördelningsfunktion F och samma täthetsfunktion f.
Nu är $\Pr(X \leq Y) = \Pr(Y \leq X) = \frac{1}{2}$ vilket är en följd av att $\Pr(X < Y) = \Pr(Y < X)$ på grund av symmetrin, att $\Pr(X = Y) = 0$ eftersom X och Y är kontiuerliga och att $\Pr(X < Y \text{ eller } Y < X \text{ eller } X = Y) = 1$.

Exempel, forts.

Ett annat sätt är att använda resultatet $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s = -f(u)$, *så att*

$$\Pr(X<Y)=\Pr(0<X<\infty,\,X<Y<\infty)=\int_0^\infty\int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\,f(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\Big/_0^\infty\left(\int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2=0+\frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}.$$

Om vi nu väljer det första erbjudandet med sannolikheten $q\in[0,1]$ *och det andra med sannolikheten* $1-q$ *så väljer vi det mindre med sannolikheten* $\frac{1}{2}$.

Ett bättre sätt är att vi väljer ett visst pris a och om det första erbjudandet är högst a så väljer vi det och annars väljer vi det andra erbjudandet. Sannolikheten att vi väljer det fördelaktigare alternativet är

$$p=\Pr\big((X\le a\,\text{och}\,X\le Y)\quad\textit{eller}\quad(X>a\,\text{och}\,Y\le X)\big).$$

Händelserna $\{X\le a\,\text{och}\,X\le Y\}$ *och* $\{X>a\,\text{och}\,Y\le X\}$ *är disjunkta så att*

Exempel, forts.

$$p=\int_0^a f(t)\left(\int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+\int_a^\infty f(t)\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\Big/_0^a\left(\int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2+\frac{1}{2}\Big/_a^\infty\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\int_a^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2+\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2-\frac{1}{2}\left(\int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s\right)^2$$

$$=-\frac{1}{2}(1-F(a))^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(a)^2$$

$$=\frac{1}{2}+F(a)-F(a)^2=\frac{1}{2}+F(a)(1-F(a)).$$

Denhär sannolikheten är som störst $\frac{3}{4}$ *om vi väljer a så att* $F(a)=\frac{1}{2}$, *dvs. medianen av* X *och* Y. *Men redan om* $\Pr(X<a)>0$ *och* $\Pr(X>a)>0$ *så är sannolikheten att vi väljer det bättre alternativet större än* $\frac{1}{2}$.

Binomialfördelningen och normalapproximation

Vi kastar en tärning 1500 *gånger. Med vilken sannolikhet är resultatet* 5 *eller* 6 *högst* 450 *gånger?*
Eftersom sannolikheten att resulatet är 5 *eller* 6 *i ett kast är* $\frac{1}{3}$ *och om vi antar att resultaten i kasten är oberoende så får vi svaret med hjälp av binomialfördelningen och det är*

$$\sum_{k=0}^{450} \binom{1500}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1-\frac{1}{3}\right)^{1500-k}.$$

Vi kan räkna denhär summan med binomailfördelningens fördelningsfunktion `binocdf(450,1500,1/3)` *och då får vi som svar* `0.003147`.
Ett annat sätt är att använda normalapproximation: Låt $X_j = 1$ *om resulatatet i kast* j *är* 5 *eller* 6 *och annars* 0. *Om nu* $Y = \sum_{j=1}^{1500} X_j$ *så är* $\mathrm{E}(Y) = 1500 \cdot \frac{1}{3} = 500$ *och* $\mathrm{Var}(Y) = 1500 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1000}{3}$. *Enligt den centrala gränsvärdessatsen är* $\frac{Y-\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \sim_a \mathrm{N}(0,1)$ *så att*

Binomialfördelningen och normalapproximation, forts.

$$\Pr(Y \le 450) = \Pr\left(\frac{Y-\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le \frac{450-\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{Y-\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le \frac{450-500}{\sqrt{\frac{1000}{3}}}\right) = \Pr\left(\frac{Y-\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le -2.73861\right)$$

$$\approx F_{\mathrm{N}(0,1)}(-2.73861) = 0.003085.$$

Om frågan är med vilken sannolikhet resultatet är 5 *eller* 6 *minst* 470 *och högst* 520 *gånger så är svaret*

$$\Pr(470 \le Y \le 520) = \Pr\left(\frac{470-500}{\sqrt{\frac{1000}{3}}} \le \frac{Y-\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le \frac{520-500}{\sqrt{\frac{1000}{3}}}\right)$$

$$= \Pr\left(-1.6432 \le \frac{Y-\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \le 1.0954\right)$$

$$\approx F_{\mathrm{N}(0,1)}(1.0954) - F_{\mathrm{N}(0,1)}(-1.6432) = 0.81316.$$

Exempel: Randfördelningar

Vi singlar slant 4 gånger. Låt X vara antalet kronor i de 2 första kasten och Y antalet klavor i de 3 sista kasten. Vad är korrelationen mellan X och Y? Slumpvariabelns (X, Y) frekvensfunktion är

$f_{XY}(x,y)$		Y			
		0	1	2	3
X	0	0	0.0625	0.125	0.0625
	1	0.0625	0.1875	0.1875	0.0625
	2	0.0625	0.125	0.0625	0

Nu är randfördelningarna av X och Y följande:

x	0	1	2
$f_X(x)$	0.25	0.5	0.25

och

y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	0.125	0.375	0.375	0.125

Exempel: Randfördelningar, korrelation, forts.

Dethär betyder att

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 0\cdot 0.25 + 1\cdot 0.5 + 2\cdot 0.25 = 1,\\
\mathrm{E}(Y) &= 0\cdot 0.125 + 1\cdot 0.375 + 2\cdot 0.375 + 3\cdot 0.125 = 1.5,\\
\mathrm{Var}(X) &= 0^2\cdot 0.25 + 1^2\cdot 0.5 + 2^2\cdot 0.25 - 1^2 = 0.5,\\
\mathrm{Var}(Y) &= 0^2\cdot 0.125 + 1^2\cdot 0.375 + 2^2\cdot 0.375 + 3^2\cdot 0.125 - 1.5^2 = 0.75.
\end{aligned}$$

Dessutom är

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3} xyf_{XY}(x,y) &= 0 + 1\cdot 1\cdot 0.1875 + 1\cdot 2\cdot 0.1875\\
&\quad + 1\cdot 3\cdot 0.0625 + 2\cdot 1\cdot 0.125 + 2\cdot 2\cdot 0.0625 = 1.25
\end{aligned}$$

Därför blir korrelationen

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{E}(XY) - E(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{Var(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{1.25 - 1\cdot 1.5}{\sqrt{0.5\cdot 0.75}} = -0.40825.$$

Exempel: Randfördelningar, korrelation, forts.

I Matlab/Octave kan vi räkna samma räkningar på följande sätt:
Först definierar vi frekvensfunktionen med kommandot
`f=[0 0.0625 0.125 0.0625; 0.0625 0.1875 0.1875 0.0625; 0.0625 0.125 0.0625 0]`
Sedan räknar vi slumpvariablernas X och Y frekvensfunktioner
`fx=sum(f'), fy=sum(f)`
Vi bestämmer också variablernas värden
`x=[0 1 2], y=[0 1 2 3]`
Sean räknar vi ut $\mathrm{E}(X)$ *och* $\mathrm{E}(Y)$
`ex=x*fx', ey=y*fy'` *(eller* `ex=sum(x.*fx), ey=sum(y.*fy)`*)*
och varianser $\mathrm{Var}(X)$ *och* $\mathrm{Var}(Y)$
`vx=x.^2*fx'-ex^2, vy=y.^2*fy'-ey^2`
och $\mathrm{E}(XY)$
`exy=x*f*y'`
så att vi som korrelationskoefficient får
`corXY=(exy-ex*ey)/sqrt(vx*vy)`.

Exempel: Betingad fördelning

Vi singlar igen slant 4 gånger och låter X vara antalet kronor i de 2 första kasten och Y antalet klavor i de 3 sista kasten. Slumpvariabelns (X, Y) frekvensfunktion är då

$f_{XY}(x,y)$		Y			
		0	1	2	3
X	0	0	0.0625	0.125	0.0625
	1	0.0625	0.1875	0.1875	0.0625
	2	0.0625	0.125	0.0625	0

och randfördelningarna är

X	0	1	2
$f_X(x)$	0.25	0.5	0.25

Y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	0.125	0.375	0.375	0.125

De betingade fördelningarna får vi genom att dividera raderna och kolumnerna i tableen med fekvensfunktoionens värden med motsvarande sannolikhet i randfördelningen.

Exempel: Betingad fördelning, forts.

- *Den betingade fördelningen X under villkoret $Y = 0$ är*

X	0	1	2
$f_{X\|Y}(x\|0)$	0	0.5	0.5

- *Den betingade fördelningen Y under villkoret $X = 2$ är*

Y	0	1	2	3
$f_{Y\|X}(y\|2)$	0.25	0.5	0.25	0

Med hjälp av den betingade fördelningen kan man räkna ut betingade väntevärden, tex.

- $\mathrm{E}(X|Y=0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 1.5.$
- $\mathrm{E}(Y|X=2) = 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0 = 1.$

Exempel: Betingad fördelning, forts.

- *Det betingade väntevärdet* $\mathrm{E}(X|Y)$ *är en slumpvariabel som får värdena* $\mathrm{E}(X|Y=0)$, $\mathrm{E}(X|Y=1)$, $\mathrm{E}(X|Y=2)$ *och* $\mathrm{E}(X|Y=3)$ *med sannolikheterna* $f_Y(0)$, $f_Y(1)$, $f_Y(2)$ *ja* $f_Y(3)$ *så att dess frekvensfunktion är*

$\mathrm{E}(X\|Y)$	1.5	1.16667	0.83333	0.5
$f_{\mathrm{E}(X\|Y)}$	0.125	0.375	0.375	0.125

- *Det betingade väntevärdet* $\mathrm{E}(Y|X)$ *är en slumpvariabel som får värdena* $\mathrm{E}(Y|X=0)$, $\mathrm{E}(Y|X=1)$ *och* $\mathrm{E}(Y|X=2)$ *med sannolikheterna* $f_X(0)$, $f_X(1)$ *ja* $f_X(2)$ *så dess frekvensfunktion är*

$\mathrm{E}(Y\|X)$	2	1.5	1
$f_{\mathrm{E}(Y\|X)}$	0.25	0.5	0.25

- *Med hjälp av fördelningarna för* $\mathrm{E}(X|Y)$ *och* $E(Y|X)$ *kan vi också kontrollera att*

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) = 1 = \mathrm{E}(X) \quad \textit{och} \quad \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)) = 1.5 = \mathrm{E}(Y).$$