Aalto-yliopisto

MS-A0502 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi — Gripenberg, Kiiski
Harjoitus 1
27-31.10.2014, viikko 44

P1. Heitetään kahta virheetöntä noppaa, joiden kuudella tahkolla on silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Tällöin heittotuloksiin liittyvä otosavaruus on

$$S = \{(x, y) : x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ ja } y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Olkoon

A = {1. nopalla saadaan 4 tai enemmän}
B = {Heittotulosten summa on 10 tai enemmän}
C = {Molemmilla nopilla saadaan sama silmäluku}

Määritä seuraavat tapahtumat ($\mathcal{S}$:n osajoukkoina) ja laske niiden todennäköisyydet:

$$(a) \quad A \cup B, \qquad (b) \quad A \cap C, \qquad (c) \quad C^c, \qquad (d) \quad B \setminus C.$$

Vastaus: $\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{5}{6}, \frac{1}{9}$

Ratkaisu: Otosavaruutta S kuvaa seuraava lukupareista (x, y) muodostuva taulukko:

	2. noppa					
1. noppa	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$A = \{\, (x, y) : x = 4, 5, 6 \text{ ja } y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \,\}$; $|A| = 18$; $\Pr(A) = 18/36 = \frac{1}{2}$
$B = \{\, (4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6) \,\}$; $|B| = 6$; $\Pr(B) = 6/36 = 1/6$
$C = \{\, (x, y) : x = y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \,\}$; $|C| = 6$; $\Pr(C) = 6/36 = 1/6$

ja tässä $|A|$ on siis joukon A alkioiden lukumäärä.

(a) Tässä tapauksessa $A \cup B = A$, joten $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) = \frac{1}{2}$.
(b) Nyt $A \cap C = \{(4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ ja $|A \cap C| = 3$, joten $\Pr(A \cap C) = 3/36 = 1/12$.
(c) $C^c = \{(x, y) \mid x = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ x \neq y\}$ Komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavan mukaan: $\Pr(C^c) = 1 - \Pr(C) = 1 - 1/6 = 5/6$
(d) $B \setminus C = \{(4, 6), (6, 4), (5, 6), (6, 5)\}$ ja $|B \setminus C| = 4$, joten $\Pr(B \setminus C) = 4/36 = 1/9$

P2. Heitetään kolikkoa. Jos tulos on kruuna, heitetään vielä kaksi kertaa. Mikä on otosavaruus ja mikä on todennäköisyys, että viimeisen heiton tulos on klaava kun oletetaan, että heittojen tulokset ovat toisistaan riippumattomia ja saadaan kruuna todennäköisyydellä 0.5.

Vastaus: $\frac{3}{4}$

Ratkaisu: Merkitään H:lla kruunaa ja T:llä klaavaa. Otosavaruus on silloin

$$S = \{\, T, HHH, HHT, HTH, HTT \,\}.$$

Yleisesti pätee, että jos kolikkoa heitetään m kertaa niin saadaan 2^m eri tulosta ja jokaisen todennäköisyys on 2^{-m} (standardioletuksilla). Näin ollen $\Pr(\{T\}) = \frac{1}{2}$ kun taas $\Pr(\{HHH\}) = \Pr(\{HHT\}) = \Pr(\{HTH\}) = \Pr(\{HTT\}) = \frac{1}{8}$. Nyt

$$\Pr(\text{"Viimeisen heiton tulos on klaava"}) = \Pr(\{\, T, HHT, HTT \,\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

P3. Erään sairauden toteamiseksi on kehitetty testi, joka ei kuitenkaan aina anna oikeata tulosta siten, että jos henkilöllä on tauti niin testi antaa tähän viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.5 ja jos henkilöllä ei ole tautia niin testi antaa tautiin viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.03. Arvioidaan lisäksi että 0.3 % väestöstä on kyseinen tauti. Mikä on todennäköisyys, että tietyllä henkilöllä on tauti jos testi antaa tähän viittaavan tuloksen?

Vastaus: ≈ 0.048

Ratkaisu: Olkoon $B_1 = \{$ ”Henkilöllä on tauti” $\}$, $B_2 = B_1^c = \{$ ”Henkilöllä ei ole tautia” $\}$ ja $A = \{$ ”Testi antaa tautiin viittaavan tuloksen” $\}$. Annettujen tietojen perusteella tiedetään, että

$$\begin{aligned}
\Pr(B_1) &= 0.003, \\
\Pr(B_2) &= 0.997, \\
\Pr(A|B_1) &= 0.5, \\
\Pr(A|B_2) &= 0.03.
\end{aligned}$$

Bayesin kaavan perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\Pr(B_1|A) = \frac{\Pr(B_1)\Pr(A|B_1)}{\Pr(B_1)P(A|B_1) + \Pr(B_2)P(A|B_2)} &= \frac{0.003 \cdot 0.5}{0.003 \cdot 0.5 + 0.997 \cdot 0.03} \\
&= \frac{0.0015}{0.0015 + 0.02991} \approx 0.048.
\end{aligned}$$

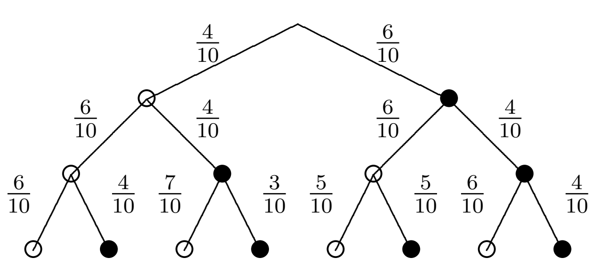
Toisella tavalla: $100\,000$ henkilön joukossa $0.003 \cdot 100\,000 = 300$:lla henkilöllä on tauti ja $99\,700$:lla ei ole tätä tautia. Sairastuneista 150:n ja terveiden $0.03 \cdot 99\,700 = 2991$:n kohdalla testi antaa tautiin viittaavan tuloksen jolloin näitä tapauksia on yhteensä 3141. Näin ollen todennäköisyydeksi tulee

$$\frac{150}{3141} \approx 0.048.$$

P4. Uurnassa A on 4 valkoista ja 6 mustaa kuulaa ja uurnassa B on 6 valkoista ja 4 mustaa kuulaa. Nostetaan kummastakin uurnasta satunnaisesti yksi kuula sekä asetetaan uurnasta A poimittu kuula uurnaan B ja uurnasta B poimittu kuula uurnaan A. Nostetaan tämän jälkeen uurnasta B satunnaisesti kuula. Mikä on todennäköisyys, että tämä viimeksi nostettu kuula on valkoinen? Käytä ratkaisussa puuverkkoa (ja jaa prosessi eri vaiheisiin, joissa ensin nostetaan kuula uurnasta A, sitten kuula uurnasta B, sitten asetetaan A:sta nostettu kuula uurnaan B ja nostetaan siitä satunnaisesti kuula).

Vastaus: 0.58

Ratkaisu: Tulosvaihtoehdoista voidaan rakentaa seuraava puuverkko:



Puun rakenne perustuu kolmivaiheiseen nostamiseen:

- Nostetaan kuula uurnasta A.
- Nostetaan kuula uurnasta B.
- Nostetaan kuula uurnasta B vaihdon jälkeen.

Todennäköisyys nostaa valkoinen kuula on siis:

$$\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{58}{100}$$

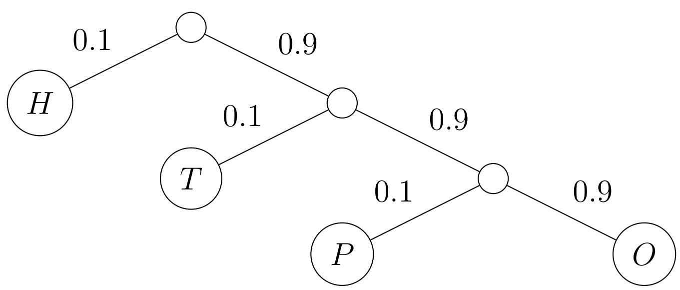
P5. Sinun pitää matkustaa lentäen Helsingistä Ouagadougouun Tukholman ja Pariisin kautta. Helsingissä, Tukholmassa ja Pariisissa sinulla on 10%:n todennäköisyys myöhästyä lentokoneesta (siis olettaen, että olet tullut niin pitkälle) jolloin et pääse eteenpäin.

(a) Millä todennäköisyydellä saavut perille Ouagadougouun?
(b) Millä todennäköisyydellä jäät Tukholmaan?
(c) Olettaen, ettet pääse perille Ouagadougouun, millä todennäköisyydellä jäät Tukholmaan?

Vastaus: 0.729, 0.09, ≈ 0.33.

Ratkaisu: Olkoon H tapahtuma, että myöhästyt Helsingissä ja jäät sinne, T tapahtuma, että jäät Tukholmaan eli ehdit koneeseen Helsingissä mutta myöhästyt Tukholmassa, P tapahtuma, että ehdit koneisiin Helsingissä ja Tukholmassa mutta myöhästyt Pariisissa ja siis jäät sinne ja O tapahtuma, että pääset perille.

Puuverkolla esitettynä tilanne näyttää seuraavanlaiselta:



(a) Laskemalla O-solmuun johtavan polun kaarien todennäköisyyksien tulo toteamme, että $\Pr(O) = 0.9\cdot 0.9\cdot 0.9 = 0.729$.

(b) Samalla periaatteella päättelemme, että $\Pr(T) = 0.9\cdot 0.1 = 0.09$.

(c) Ehdollisen todennäköisyyden kaavan nojalla saamme lopuksi, koska $T\subset O^c$, että

$$\Pr(T|O^c)=\frac{\Pr(T\cap O^c)}{\Pr(O^c)}=\frac{\Pr(T)}{1-\Pr(O)}=\frac{0.09}{1-0.729}\approx 0.33.$$
