Aalto-universitetet

Gripenberg

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik
Mellanförhör 1, 2.10.2013

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (6p) Visa med hjälp av induktion att

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i} \stackrel{\text{def}}{=} \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{(n+1)^n}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Lösning: Påståendet $P(n)$ är alltså $\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{i})^i = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}$, och $n_0 = 1$. Påståendet $P(1)$ är att $(1+\frac{1}{1}) = \frac{(1+1)^1}{1!}$ dvs $2 = 2$ så det är sant. Om nu $P(k)$ är sant så har vi

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i} = \frac{(k+1)^k}{k!},$$

och då får vi

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1}\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i} &= \prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{(k+1)^k}{k!}\left(\frac{k+1+1}{k+1}\right)^{k+1} \\ &= \frac{(k+1)^k(k+2)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}k!} = \frac{((k+1)+1)^{k+1}}{(k+1)k!} = \frac{((k+1)+1)^{k+1}}{(k+1)!},\end{aligned}$$

vilket innebär att $P(k+1)$ är sant. Med hjälp av induktionsprincipen får vi nu påståendet.

---

2. (6p) Vilka av följande satser är sanna och vilka falska? Motivera kort dina svar genom att förklara vad satsen säger och sedan varför den är sann eller falsk. Här är $\mathbb{Z}$ mängden heltal, $\mathbb{N}_+ = \{\, n \in \mathbb{Z} : n \geq 1 \,\}$ och normala aritmetiska beteckningar används.

(a) $\forall x\Big(\exists y\big(x \in \mathbb{Z} \to (y \in \mathbb{Z} \,\&\, x+y \in N_+)\big)\Big)$

(b) $\forall x\big((x \in \mathbb{Z} \,\&\, x^2 = 3) \to x < -10\big)$

(c) $\exists x\Big(!\big(x \in N_+ \to x-1 \in \mathbb{N}_+\big)\Big)$

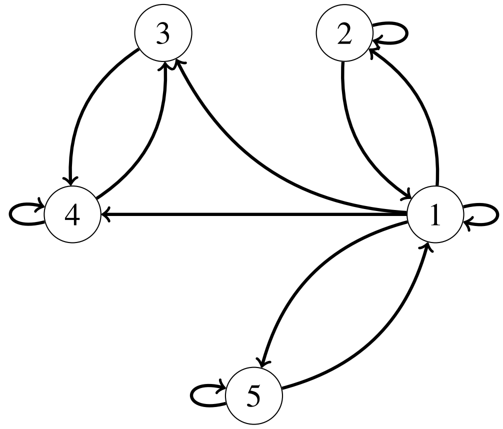
Lösning: (a) Denna sats säger att för varje x finns det ett y så att om x är ett heltal så är y ett heltal och summan av x och y är ett positivt heltal. Detta är sant för då x är ett heltal kan vi välja $y = |x| + 1$ och då är $x + y$ ett positivt heltal. (Om x nu inte skulle råka vara ett heltal spelar det ingen roll hur vi väljer y, implikationen är ändå sann.)

(b) Denna sats säger att för alla x gäller att om x är ett heltal och $x^2 = 3$ så är x mindre än -10. Detta är sant för det är aldrig sant att x är ett heltal och $x^3 = 3$, så implikationen är sann.

(c) Denna sats säger att det finns ett x så att det inte är sant att om x är ett positivt heltal så är $x-1$ ett positivt heltal. Detta är sant eftersom vi kan välja $x = 1$ och då är $x - 1 = 0$ inte ett positivt heltal så i detta fall är implikationen inte sann och dess negation sann.

---

3. (4p) En relation W i $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ definieras med följande riktade graf så att det finns en båge från nod j till nod k om och endast om $[j, k] \in W$, (dvs. jWk).



Förklara varför relationen inte är reflexiv, inte symmetrisk och inte heller transitiv.

Lösning: Relationen är inte reflexiv eftersom $[3, 3] \notin W$, dvs. det finns ingen båge från nod 3 till nod 3.

Relationen är inte symmetrisk eftersom tex. $[1, 4] \in W$ men $[4, 1] \notin W$, dvs. det finns en båge från nod 1 till nod 4 men ingen båge från nod 4 till nod 1.

Relationen är inte transitiv eftersom tex. $[2, 1] \in W$ och $[1, 5] \in W$ men $[2, 5] \notin W$, dvs. det finns en båge från nod 2 till nod 1 och en båge från nod 1 till nod 5 men det finns inte en båge från nod 2 till nod 5.

---

4. (4p) På hur många sätt kan man ordna bokstäverna A, B, C, D, E och F så att A kommer före C? Förklara hur du resonerat.

Lösning: Först kan vi välja platserna för A och C, detta kan göras på $\binom{6}{2}$ sätt eftersom vi skall göra ett icke-ordnat val av 2 bland 6 och sedan skall A och C placeras på dessa platser så att A kommer före C vilket bara kan göras på ett sätt. Sedan skall de återstående 4 bokstäverna ordnas och palcears på de återstående platserna. Detta kan ske på $4!$ olika sätt. Enligt produktprincipen blir antalet alternativ därför

$$\binom{6}{2} \cdot 4! = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360.$$

Ett annat sätt att resonera är att konstatera att om alla 6 bokstäver ordnas utan begränsningar finns det $6! = 720$ olika alternativ men bara i hälften av dessa kommer A att komma före C så antalet som efterfrågas blir $\frac{720}{2} = 360$.

---

5. (4p) Ur ett lager delas 7 läroböcker i matematik ut till 5 personer. På hur många sätt kan detta göras om böckerna kan anses vara identiska men mottagarna inte är det. Förklara hur du resonerat.

Lösning: Här skall man 7 gånger välja mottagare av en bok och eftersom böckerna är identiska spelar det ingen roll i vilken ordning man delar ut böckerna. Eftersom flera böcker kan ges åt samma person är detta ett icke-ordnat val med upprepningar så antalet alternativ blir

$$\binom{5+7-1}{7} = \frac{11!}{7! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$$