Aalto-universitetet

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik — Gripenberg
Övning 6
Vecka 42, 13.10–17.10.2014
Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs: 15,16, 17

Returnera lösningarna till I-uppgifterna senast 20.10.2014 kl. 10.30
Kom ihåg att skriva ditt namn och studentnummer!

I1. Antag att ett antal studerande skall delta i tenter i kurserna $1,\ 2,\ \ldots,\ 7$ enligt följande:

Stud. A	1	2
Stud. B	1	4
Stud. C	1	6
Stud. D	2	3
Stud. E	3	4
Stud. F	3	5
Stud. G	5	6
Stud. H	4	7
Stud. I	5	7

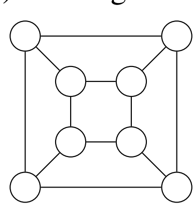
Rita en graf med noder n, $n = 1, 2, \ldots 7$ så att det finns en båge mellan noderna j och k om och endast om det finns åtmintone en studerande som skall delta i tenten i både kursen j och kursen k. Bestäm det kromatiska talet för grafen, dvs. det minsta antal färger med vilka noderna kan färgas så att två noder mellan vilka det finns en båge har olika färger och förklara hur du kommit fram till ditt svar. Vad säger detta tal?

I2. I en urna finns till en början 4 vita och 6 svarta bollar. Vi plockar slumpmässigt en boll ur urnan och om den är vit lägger man tillbaka den vita bollen och dessutom en svart boll och om den är svart lägger man en vit boll i urnan, men den svarta man tagit upp läggs inte tillbaka. Detta görs ytterligare två gånger. Rita ett träd som beskriver denna procedur och ge bågarna en vikt som är sannolikheten ($\frac{a}{a+b}$ eller $\frac{b}{a+b}$ om a är antalet vita och b antalet svarta bollar) för just det fallet. Skriv i noderna antalet svarta och antalet vita bollar. Beräkna sannolikheten för att det till slut (efter att man alltså plockat och eventuellt satt tillbaka bollar tre gånger) finns 5 svarta bollar i lådan. Sannolikheten fås genom att multiplicera vikterna för bågarna från startnoden till varje slutnod med 5 svarta bollar, och sedan addera dessa sannolikheter.

Svar: $\frac{2919}{6050} \approx 0.48$

I3. Två grafer har grannmatriserna $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Är graferna isomorfa? Motivera ditt svar!

I4. Ordna noderna (dvs. numrera dem) i ”kub-grafen”



på tre olika sätt så att den giriga algortimen för att färga noderna kräver 2, 3 och 4 färger.

I5. Antag att $[V, E]$ är en riktad graf i vilken det inte finns någon cykel och $0 < |V| < \infty$. Då är denna graf också enkel, dvs. $[a, a] \notin E$ för alla $a \in V$. Visa att det finns en nod $a \in V$ så att $[b, a] \notin E$ för alla $b \in V$.

Obs! *Med hjälp av detta resultat kan man visa att det i en riktad graf inte finns cykler om och endast om man kan indexera noderna så att* $j < k$ *om* $[v_j, v_k] \in E$.

Besvara Stack-uppgifterna (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=15`)
senast 20.10.2014 kl. 10.30
