Aalto-universitetet

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik Gripenberg
Övning 2
Vecka 38, 15–19.9.2014
Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs: 5, 6, 14

Returnera lösningarna till I-uppgifterna senast 22.9.2014 kl. 10.30
Kom ihåg att skriva ditt namn och studentnummer!

I1. Konstruera en bijektion $f : [0, 1] \to (0, 1]$ och observera att 0 hör till definitionsmängden men inte till bildmängden.

Ledning: En surjektion är det lätt att konstruera: Låt $f(x) = x$ *då* $0 < x \leq 1$ *låt sedan tex.* $f(0) = 1$. *Modifiera denna konstruktion så att du får en bijektion.*

I2. Antag att (x_j, y_j), $j = 1, 2, 3, 4, 5$ är fem punkter i planet så att $x_j, y_j \in \mathbb{Z}$ för alla j. Visa att vi kan välja två av dessa punkter så att mittpunkten av sträckan mellan dem också har heltal som koordinater.

I3. Om man skall räkna ut x^n och räknar $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$ osv. så måste man räkna $n - 1$ multiplikationer. Ett effektivare sätt är att räkna $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$ osv. och sedan multiplicera de potenser x^{2^j} som behövs med varandra för att få fram x^n. Bestäm en funktion $f(n)$ så att antalet multiplikationer med denna metod blir $O(f(n))$.

I4. Låt Sur(m, n) vara antalet surjektioner från en mängd A med m element till en mängd B med n element. Förklara hur och varför man kan uttrycka Sur(m, n) med hjälp av Sur$(m - 1, n - 1)$ och Sur$(m - 1, n)$. Använd detta resultat för att räkna ut Sur$(4, 2)$. (Använd inte formeln för Sur(m, n).)

Svar: 14

I5. Anta att det finns en surjektion g från $\mathbb{N}_0$ till $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ (dvs. till mängden av alla funktioner från N_0 till $\{0, 1\}$). Visa att detta leder till en motsägelse genom att konstruera en funktion i $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ som inte hör till $g(\mathbb{N}_0)$.

Ledning: För varje $n \in \mathbb{N}_0$ *är* $g(n)$ *en funktion* $\mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ *dvs.* $g(n)(j) \in \{0, 1\}$ *för alla* $j \geq 0$. *Använd talen* $g(n)(n)$ *i din konstruktion!*

Besvara Stack-uppgifterna (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=15`)
senast 22.9.2014 kl. 10.30
