Aalto-yliopisto

MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet — Gripenberg, Ketola
Harjoitus 5
24–28.3.2014, viikko 13

Palauta P-tehtävät viimeistään 31.3.2014 kl. 16
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Funktio $\alpha : \{0, 1, \ldots, 10\} \to \{0, 1, 2 \ldots, 10\}$ joka on määritelty kaavalla $\alpha(x) = \text{mod}\,(4 \cdot x, 11)$ on bijektio (koska syt $(4, 11) = 1$). Määritä tämän bijektion radat eli joukot $\{\, \alpha^j(x) : j \geq 0 \,\}$ kun $x \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ ja $\alpha^j = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{j}$) ja kirjoita α syklien tulona.

Vihje: Esimerkiksi sykli $\beta = (a\ b\ c)$ on bijektio joka toteuttaa ehdot $\beta(a) = b$, $\beta(b) = c$ ja $\beta(c) = a$ ja $\beta(x) = x$ kaikilla muilla x.

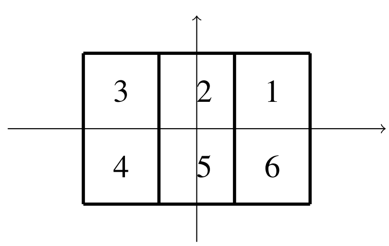
Vastaus: $\alpha = (1\ \ 4\ \ 5\ \ 9\ \ 3)(2\ \ 8\ \ 10\ \ 7\ \ 6)$

P2. Symmetrinen ryhmä S_3 sisältää kaikki joukon $\{1, 2, 3\}$ permutaatiot.

(a) Osoita, että $H = \{(1), (2\ 3)\}$ (missä on käytetty syklimerkintöjä) on S_3:n aliryhmä, eli että H:n alkioiden tulot kuuluvat H:hon.
(b) Määritä H:n vasemmat sivuluokat aH, $a \in S_3$.
(c) Määritä (b)-kohdan tulosten avulla alkioita a, b, c ja $d \in S_3$ siten, että $aH = bH$ ja $cH = dH$ mutta $acH \neq bdH$ (ja tästä seuraa ettei ole mahdollista määritellä operaatio $\diamond$ vasemmilla sivuluokilla siten, että $(xH) \diamond (yH) = xyH$.)

Huom! *Jos laskisit oikeat sivuluokat Ha, $a \in S_3$ niin tulisit huomaamaan, että nämä eivät ole samat kuin vasemmat sivuluokat!*

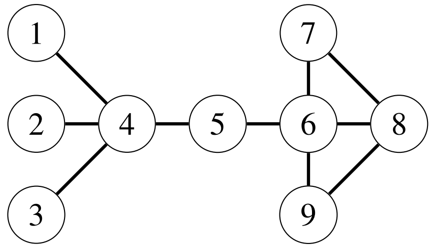
P3. Olkoon X lauta jossa on 3×2 neliötä, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja laudan keskipiste on origossa.



Symmetriakuvaukset ovat rotaatiot origon ympäri kulmien 0 tai π verran ja peilaukset x- ja y-akselien suhteen. Jos neliöt numeroidaan $1, 2, 3, 4, 5, 6$ positiiviseen suuntaan niin nämä kuvaukset ovat permutaatiot (1), $(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$, $(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$ och $(1\ 3)(4\ 6)$. Nämä permutaatiot muodostavat ryhmän G (mutta tätä ei tarvitse tarkistaa). Määritä sykli-indeksi $\zeta_{G,X}$ ja sen avulla monellako tavalla laudan neliöitä voidaan "värittää" 3:lla "värillä".

Vastaus: 216

P4. Määritä ryhmä G joka muodostuu kaikista alla olevan verkon



solmujen permutaatioista f siten, että jos solmujen a ja b välillä on kaari (eli a ja b ovat naapureita), niin myös solmujen $f(a)$ ja $f(b)$ on kaari, (eli nekin ovat naapureita).

Määritä myös ryhmän sykli-indeksi $\zeta_{G,X} = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}\zeta_{f,X}$ missä $\zeta_{f,X}(t_1,\ldots,t_n) = t_1^{j_1}\cdot t_2^{j_2}\cdot\ldots\cdot t_n^{j_n}$ kun j_k on permutaation f k-pituisten ratojen lukumäärä.

Vihje: Jos f on tällainen permutaatio niin $f(a)$:lla on yhtä monta naapuria kuin a:lla.

Vastaus: $\zeta_{G,X}(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{12}\left(t_1^9 + 4t_1^7t_2 + 3t_1^5t_2^2 + 2t_1^6t_3 + 2t_1^4t_2t_3\right)$

P5. Montako erilaista helminauhaa voidaan valmistaa käyttämällä 4 valkoista ja 3 mustaa helmeä. Tässä kaksi helminauhaa pidetään samoina jos toinen saadaan toisesta rotaatiolla ja/tai peilauksella, toisin sanoen, symmetriaryhmä on diedriryhmä. Muista, että diedriryhmän D_n, joka muodostuu säännöllisen n-kulmaisen monikulmion rotaatioista ja peilauksista, sykli-indeksi on

$$\zeta_{D_n,\mathbb{N}_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \frac{1}{2n}\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)t_d^{\frac{n}{d}} + \begin{cases}\frac{1}{4}\left(t_2^{\frac{n}{2}} + t_1^2t_2^{\frac{n}{2}-1}\right), & \text{jos } n \text{ on parillinen,}\\ \frac{1}{2}t_1t_2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{jos } n \text{ on pariton,}\end{cases}$$

missä $\varphi(d)$ on Eulerin funktio eli $\varphi(d) = |\{\, j\in\mathbb{Z} : 0\le j\le d-1,\ \mathrm{syt}\,(j,d)=1\,\}|$.

Vastaus: 4

Vastaa Stack-tehtäviin (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=17`) viimeistään 31.3.2014 kl. 16.00
