Aalto-yliopisto

MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet — Gripenberg, Ketola
Harjoitus 2
3–7.3.2014, viikko 10

Palauta P-tehtävät viimeistään 10.3.2014 kl. 16
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Jos X ja Y ovat joukkoja, $f : X \to Y$ on funktio, $A \subset X$ ja $B \subset Y$ niin

$$f(A) = \{\, y \in Y : \exists x(x \in A \ \&\ f(x) = y) \,\} \quad \text{och} \quad f^{\leftarrow}(B) = \{\, x \in X : f(x) \in B \,\}.$$

Mitä voidaan sanoa joukoista $f^{\leftarrow}(f(A))$ ja $f(f^{\leftarrow}(B))$ ja mitä pitää olettaa funktiosta f jotta $f^{\leftarrow}(f(A)) = A$ ja mitä pitää olettaa jotta $f(f^{\leftarrow}(B)) = B$.

Huom! *Yhtä hyvin (paremminkin?) voitaisiin A:n kuvajoukon $f(A)$:n määritelmäksi ottaa $f(A) = \{\, f(x) : x \in A \,\}$. Joukko $f^{\leftarrow}(B)$ on joukon B alkukuva ja usein kirjoitetaan $f^{\leftarrow}$ sijasta f^{-1}.*

P2. Jos A ja B ovat kaksi $n \times n$-matriisia niin niiden tulo $A \cdot B$ on määritelmän mukaan matriisi jonka alkiot ovat

$$(A \cdot B)(i, j) = \sum_{k=1}^{n} A(i, k) \cdot B(k, j), \quad 1 \le i, j \le n.$$

Montako (lukujen) kertolaskua tarvitaan jos lasketaan $A \cdot B$ tätä määritelmää käyttäen.

On myös mahdollista laskea kahden 2×2-matriisin tulo käyttäen 7 kertolaskua. Jos nyt halutaan laskea kahden $2m \times 2m$ matriisin tulo nämä matriisit voidaan kirjoittaa muodossa $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix}$ missä A, B, C, D, S, T, U ja V ovat $m \times m$ matriiseja ja näiden $2m \times 2m$ matriisien tulon laskemiseksi riittää silloin laskea kahden $m \times m$-matriisin tulo 7 kertaa.

Määritä tämän tuloksen avulla luku a siten, että käyttäen n^a lukujen kertolaskua (ja suuri määrä yhteen ja vähennyslaskuja) voidaan laskea kahden $n \times n$-matriisin tulo kun $n = 2^p$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla p.

Vastaus: ≈ 2.8074.

P3. Olkoon Sur(m, n) surjektioiden lukumäärä joukosta A joukkoon B kun joukossa A on m alkiota ja joukossa B on n alkiota. Selitä miten ja miksi Sur(m, n) voidaan esittää Sur$(m - 1, n - 1)$:n ja Sur$(m - 1, n)$:n avulla. Laske Sur$(4, 2)$ tämän tuloksen avulla ja muista, että Sur$(m, 1) = 1$ kun $m \ge 1$ ja Sur$(m, n) = 0$ kun $m < n$.

Vihje: Surjektiot joukosta A joukkoon B voidaan konstruida siten, että kiinnitetään tietty alkio $x_0 \in A$, sitten valitaan $f(x_0)$ ja sitten määritellään f:n arvot $f(x)$ kun $x \in A \setminus \{x_0\}$ siten, että saadaan surjektio jolloin joko $f(A \setminus \{x_0\}) = \ldots$ tai $\ldots$.

Vastaus: 14

P4.

(a) Oleta, että X on ei-tyhjä joukko ja W on relaatio joukossa X, eli joukon $X \times X$ osajoukko, joka on sekä symmetrinen että transitiivinen. Seuraako tästä, että se on myös refleksiivinen? Perustele!

(b) Oleta, että X on ei-tyhjä joukko ja $V_j \subset X$ kun $j = 1, 2, \ldots, m$ missä $m \geq 1$. Relaatio $\sim$ joukossa X määritellään niin, että

$$a \sim b \leftrightarrow \exists j \in \{1, \ldots m\}(a \in V_j \ \& \ b \in V_j)?$$

Millä joukkoja V_j koskevilla ehdoilla relaatio $\sim$ on symmetrinen, millä refleksiivinen ja millä transitiivinen? (Transitiivisuuden kohdalla riittää riittävä ehto.)

P5. Oleta, että on olemassa surjektio $h : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$. Määritelmän mukaan $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ kun f on funktio $f : N_0 \to \{0,1\}$. Osoita, että tämä johtaa ristiriitaan konstruoimalla funktio f joka kuuluu joukkoon $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ mutta joka, ei kuulu joukkoon $h(\mathbb{N}_0)$ eli tällainen surjektio h ei ole olemassa.

Vihje: Jos $n \in \mathbb{N}_0$ niin $h(n)$ on funktio $\mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ eli $h(n)(j) \in \{0,1\}$ kaikilla $j \geq 0$. Määrittele funktiosi f lukujen $h(n)(n)$ avulla.

Huom! *On mahdollista (eikä kovinkaan vaikeata) konstruoida bijektio joukosta $\mathbb{N}_0$ joukkoon A joka muodostuu kaikista äärellisen pitkistä teksteistä kirjoitettuina äärellisen monella merkillä. Jokainen äärellisen pitkä tietokoneohjelma kuuluu joukkoon A, joten tämä tulos osoittaa, ettei löydy surjektiota äärellisen pitkien tiekokoneohjelmien joukosta joukkoon $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ eli on olemassa funktio, jonka arvoja ei voida laskea äärellisen pitkällä tietokoneohjelmalla.*

Vastaa Stack-tehtäviin (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=17`)
viimeistään 10.3.2014
