MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet
Yhteenveto, osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

30. syyskuuta 2015

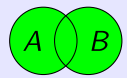
1. Joukko-oppi ja logiikka
   - Predikaattilogiikka
   - Induktioperiaate
2. Relaatiot ja funktiot
   - Funktiot
   - Iso-O
3. Kombinatoriikka ym.
   - Summa-, tulo ja lokeroperiaate

Joukot

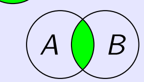
- *Joukko-opissa peruskäsite on* $\in$ *eli* $x \in A$ *kun "alkio* x *kuuluu joukkoon* A*" ja* $x \notin A$ *kun "alkio* x *ei kuulu joukkoon* A*".*
- *Merkintätapoja:* $\{2,4,5,8\}$ *on joukko jonka alkiot ovat 2, 4, 5 ja 8 ja* $\{4,5,\dots 2014\}$ *on joukko, jonka alkiot ovat kaikki kokonaisluvut* j *joille pätee* $4 \le j \le 2014$.
  $\{\, x \in A : P(x) \,\}$ *tai* $\{\, x : x \in A,\ P(x) \,\}$ *on joukko johon kuluvat ne joukon* A *alkiot joille väite* $P(x)$ *on tosi ja yleisemmin* $\{\, \texttt{lauseke} : \texttt{ehto} \,\}$ *on joukko johon kuuluu* `lausekkeen` *antamat alkiot kun* `ehto` *on voimassa, esim.* $\{\, x^2 : 2 < x < 10,\ x \text{ on kokonaisluku} \,\} = \{9, 16, 25, \dots, 81\}$.
- *Tyhjä joukko:* $\emptyset = \{\}$ *on tyhjä joukko johon ei kuulu yhtään alkiota, eli* $x \in \emptyset$ *on aina epätosi.*
- $A = B$ *jos on totta, että* $x \in A$ *jos ja vain jos* $x \in B$*, eli esimerkiksi* $\{1,2,2,3\} = \{3,2,1\}$.
- *Ei-negatiiviset kokonaisluvut joukkoina: Jos* $\emptyset$ *"on" luku 0 niin* $\{\emptyset\}$ *"on" luku 1,* $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ *"on" luku 2,* $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ *"on" luku 3 jne.*

Joukko-opin perusmerkintöjä

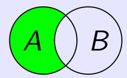
- *Yhdiste tai unioni:* $x \in A \cup B$ *jos ja vain jos* $x \in A$ **tai** $x \in B$.



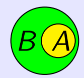
- *Leikkaus:* $x \in A \cap B$ *jos ja vain jos* $x \in A$ **ja** $x \in B$.



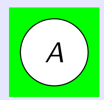
- *Joukkoerotus:* $x \in A \setminus B$ *jos ja vain jos* $x \in A$ **mutta** $x \notin B$.



- *Osajoukko:* $A \subseteq B$ *jos jokainen* A*:n alkio on myös* B*:n alkio.*



- *Potenssijoukko:* $\mathcal{P}(A)$ *on joukon kaikkien osajoukkojen muodostama joukko.*
- *Yhtäläisyys:* $A = B$ *jos* $A \subseteq B$ *ja* $B \subseteq A$.
- *Komplementti:* $A^c = \Omega \setminus A$ *jos* $A \subseteq \Omega$ *ja on selvää mikä* Ω *on.*



- *Yhdiste tai unioni:* $x \in \cup_{j \in J} A_j$ *jos ja vain jos* $x \in A_j$ *jollakin* $j \in J$.
- *Leikkaus:* $x \in \cap_{j \in J} A_j$ *jos ja vain jos* $x \in A_j$ *kaikilla* $j \in J$.

Huom!

Usein kirjoitetaan $A \subseteq B$:n sijasta $A \subset B$ ja silloin kirjoitetaan $A \subsetneq B$ kun A on B:n aito osajoukko, eli $A \subseteq B$ mutta $A \neq B$.

Standardimerkintöjä

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *on luonnollisten lukujen (missä* 0 *on mukana) joukko.*
- *Merkinnällä* $\mathbb{N}$ *tarkoitetaan joskus* $\mathbb{N}_0$ *ja joskus* $\{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *on kokonaislukujen joukko.*
- $\mathbb{Q} = \{\, \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \,\}$ *on rationaalilukujen joukko.*
- $\mathbb{R}$ *on reaalilukujen joukko.*

Propositiologiikka eli lausekalkyyli

Jos a ovat b lauseita tai väitteitä, jotka voivat olla tosia tai epätosia mutta ei mitään siltä väliltä niin

- *Lause a* AND *b on tosi kun a on tosi ja b on tosi*
- *Lause a* OR *b on tosi kun a on tosi tai b on tosi (ja myös kun molemmat ovat tosia).*
- *Lause* NOT *a on tosi kun a ei ole tosi eli a on epätosi.*
- *Lause $a \rightarrow b$ on tosi kun (*NOT *a)* OR *b on tosi, eli kun b on tosi tai a on epätosi.*
- *Lause $a \leftrightarrow b$ kun $(a \rightarrow b)$* AND *$(b \rightarrow a)$ on tosi.*

Matemaattisessa logiikassa käytetään yleisesti AND*:n sijasta $\wedge$,* OR*:n sijasta $\vee$ ja* NOT*:n sijasta $\neg$.*

Implikaatio $\rightarrow$

Logiikan lause $a \rightarrow b$ ei täysin vastaa jokapäiväisen kielenkäytön "jos a niin b" koska se on tosi kun a on epätosi eikä sillä välttämättä ole mitään tekemistä syy-seuraus suhteen kanssa.

Predikaattilogiikka

- *Lause $\forall x\, P(x)$ on tosi kun $P(x)$ on tosi kaikilla x.*
- *Lause $\exists x\, P(x)$ on tosi kun on olemassa x siten, että $P(x)$ on tosi.*

*Predikaattilogiikka on lausekalkyylin laajennus, jossa operaatioden eli konnektiivien (*NOT *,* AND*,* OR*, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$) lisäksi käytetään universaali- ja eksistenssi kvanttorit $\forall$ ("kaikilla") ja $\exists$ ("on olemassa"), ja lauseiden lisäksi käytetään muuttujia $x, y, \ldots$ ja predikaatteja $P, Q, \ldots$.*
Predikaateilla on äärellinen määrä argumentteja, esim. $P(x)$, $Q(x, y)$, jne., ja predikaatti joiden argumenttien lukumäärä on 0 on lause.
Predikaattien lisäksi voidaan käyttää funktioita joiden arvot kuuluvat samaan käsiteltävään aihepiiriin ("domain of discourse") kuin muuttujat.
Funktio, jolla ei ole muuttujaa on vakio. Funkiot ja vakiot voidaan esittää predikaattien avulla, mutta se on usein kömpelö vaihtoehto.

Prioriteettijärjestys

Jos ei käytetä sulkuja, joilla tietenkin on korkein prioriteetti, niin loogiset konnektiivit evaluoidaan tavallisesti seuraavassa järjestyksessä: Ensin NOT *, sitten $\forall$ ja $\exists$, sitten* AND *ja* OR *ja lopuksi $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.*

$\forall x \in A$ ja $\exists x \in A$

Lauseet $\forall x \in A\,(P(x))$ ja $\exists x \in A\,(P(x))$ ovat lyhenteitä lauseista

$$\forall x\,(x \in A \rightarrow P(x)),$$
$$\exists x\,(x \in A \text{ AND } P(x)),$$

ja tarkoittavat (tietenkin) että "kaikilla A:n alkiolla x pätee $P(x)$" ja "on olemassa A:n alkio x, jolla $P(x)$ pätee".

Negaatio NOT, konnektiivit AND ja OR sekä kvanttorit $\forall$ ja $\exists$

Kaikilla lauseilla a ja b pätee

$$\text{NOT}\,(a \text{ AND } b) \leftrightarrow (\text{NOT } a) \text{ OR } (\text{NOT } b),$$
$$\text{NOT}\,(a \text{ OR } b) \leftrightarrow (\text{NOT } a) \text{ AND } (\text{NOT } b),$$

eli esimerkiksi NOT $(a$ AND $b)$ *on tosi täsmälleen silloin kun* NOT a OR NOT b *on tosi ja lause* NOT $(a$ AND $b) \leftrightarrow$ NOT a OR NOT b *on tautologia koska se on tosi riippumatta a:n ja b:n totuusarvoista.*
Samoin kaikilla predikaateilla P pätee

$$\text{NOT}\,(\forall x(P(x))) \leftrightarrow \exists x(\text{NOT } P(x)),$$
$$\text{NOT}\,(\exists x(P(x))) \leftrightarrow \forall x(\text{NOT } P(x)).$$

Suora, käänteinen suora ja epäsuora päättely

- *Suorassa päättelyssä johdetaan väite "suoraan" oletuksista.*
- *Jos pitää osoittaa, että oletuksesta a seuraa väite b, niin käänteisessä suorassa, eli kontrapositiivisessa, päättelyssä osoitetaan, että jos väite b ei ole tosi niin silloin oletus a ei myöskään ole tosi. Tämä perustuu siihen että lause* $a \to b$ *on ekvivalentti lauseen* $(\text{NOT } b) \to (\text{NOT } a)$ *kanssa.*
- *Epäsuorassa päättelyssä oletetaan, että väite b ei päde ja johdetaan siitä ristiriita. Tässä siis osoitetaan (annetuilla oletuksilla) että lause* $(\text{NOT } b) \to (c \text{ AND } (\text{NOT } c))$ *on tosi. Mutta tämä lause on* $(\text{NOT}\,(\text{NOT } b)) \text{ OR } (c \text{ AND } (\text{NOT } c))$ *ja koska* $(c \text{ AND } (\text{NOT } c))$ *on epätosi niin* $(\text{NOT}\,(\text{NOT } b))$ *eli b on tosi.*

Käänteinen suora päättely on erikoistapaus epäsuorasta päättelystä koska ristiriidaksi tulee $a \text{ AND } (\text{NOT } a)$ *jos oletetaan, että* $a \to b$ *ei ole tosi eli* $a \text{ AND } (\text{NOT } b)$ *on tosi ja osoitetaan, että* $(\text{NOT } b) \to (\text{NOT } a)$ *on tosi.*

Induktioperiaate

Jos $P(n)$ on väite (joka kaikilla $n \geq n_0$ on joko tosi tai epätosi) ja

(a) $P(n_0)$ *on tosi*

(b) $P(k+1)$ *on tosi jos $P(k)$ on tosi (eli $P(k) \to P(k+1)$ on tosi) kun* $k \geq n_0$

niin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \geq n_0$.
Joskus on tarpeen ottaa induktio-oletukseksi väite, että $P(j)$ on tosi kun $n_0 \leq j \leq k$ sen sijaan että pelkästään oletetaan, että $P(k)$ on tosi.

Miksi induktioperiaate toimii?

Olkoon $E = \{\, n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0,\ P(n)$ ei ole tosi$\,\}$. Oletamme, että E ei ole tyhjä, eli että $P(n)$ ei ole tosi kaikilla $n \geq n_0$. Silloin joukossa E on pienin alkio. Olkoon tämä luku n_1. (a)-kohdan nojalla $n_1 \neq n_0$ joten $n_1 > n_0$ jolloin $k = n_1 - 1 \geq n_0$. Koska n_1 oli pienin alkio joukossa E väite $P(k)$ on tosi jolloin (b)-kohdasta seuraa, että $P(k+1) = P(n_1)$ on tosi. Mutta koska $n_1 \in E$ niin tämä on ristiriita joten oletus, että E ei ole tyhjä ei pidä paikkansa vaan $P(n)$ on tosi kaikilla $n \geq n_0$.

Karteesinen tulo

Kahden joukon X ja Y karteesinen tulo $X \times Y$ on joukko johon kuuluvat kaikki järjestetyt parit $[a, b]$ (tai (a, b)) missä $a \in X$ ja $b \in Y$, eli

$$X \times Y = \{\, [a, b] : a \in X \text{ ja } b \in Y \,\}.$$

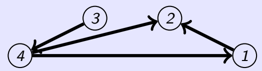
Järjestyn pari $[a, b]$ määritelmäksi otetaan tässä joukko $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. (Muitakin mahdollisuuksia on olemassa ja harvoin tätä määritelmää todella joudutaan käyttämään.)

Relaatiot

Relaatio joukosta X joukkoon Y (tai relaatio joukossa X jos $Y = X$) on karteesisen tulon $X \times Y$ osajoukko.

Verkko?

Verkko, eli graafi muodostuu joukosta solmuja ja joukosta niiden välisiä kaaria (tai linkkejä), esim näin:



Suunnatussa verkossa jokaisella kaarella on lähtösolmu ja kohdesolmu kun suuntaamattomassa verkossa ei tehdä eroa lähtö- ja kohdesolmun välillä.

- *Suunnattu verkko on järjestetty pari* $[V, E]$ *(*$V =$*"vertex",* $E =$*"edge") missä* V *on joukko (tavallisesti äärellinen ja ei-tyhjä) ja* $E \subset V \times V$*, eli* E *on relaatio joukossa* V*.*
- *Suuntaamaton verkko on järjestetty pari* $[V, E]$ *missä* V *on joukko (tavallisesti äärellinen ja ei-tyhjä) ja* $E \subset \{\, \{a, b\} : a \in V, b \in V \,\}$*.*

Suuntaamaton verkko voidaan myös ajatella olevan suunnattu verkko missä relaatio E *on symmetrinen, eli* $[a, b] \in E \to [b, a] \in E$*.*

Erilaisia relaatioita joukossa X

Relaatio W *joukossa* X *on*

- *refleksiivinen jos* $[x, x] \in W$ *kaikilla* $x \in X$*.*
- *symmetrinen jos* $[x, y] \in W \to [y, x] \in W$ *kaikilla* x *ja* $y \in X$*.*
- *transitiivinen jos* $[x, y] \in W$ AND $[y, z] \in W \to [x, z] \in W$ *kaikilla* x, y *ja* $z \in X$*.*
- *antisymmetrinen jos* $[x, y] \in W$ AND $x \neq y \to [y, x] \notin W$ *eli* $[x, y] \in W$ AND $[y, x] \in W \to x = y$ *kaikilla* x *ja* $y \in X$*.*
- *asymmetrinen jos* $[x, y] \in W \to [y, x] \notin W$ *kaikilla* x *ja* $y \in X$*.*
- *totaalinen tai täydellinen jos* $[x, y] \in W$ OR $[y, x] \in W$ *kaikilla* x *ja* $y \in X$*.*
- **ekvivalenssirelaatio** *jos* W *on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.*
- **osittaisjäjestys** *jos* W *refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen.*

Usein kirjoitetaan $[x, y] \in W$*:n sijasta* xWy *esim.* $x \prec y$ *eikä* $[x, y] \in \prec$*.*

Ekvivalenssiluokat

Jos X *on ei-tyhjä joukko ja* $\sim$ *on ekvivalenssirelaatio joukossa* X*, eli* $\sim$ *on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, niin se jakaa joukon* X *osajoukkoihin* $Y_j \neq \emptyset$*,* $j \in J$ *joita kutsutaan ekvivalenssiluokiksi siten, että*

- $\cup_{j \in J} Y_j = X$*,*
- $Y_j \cap Y_k = \emptyset$ *jos* $j \neq k$*,*
- $a \sim b \leftrightarrow a$ *ja* b *kuuluvat samaan joukkoon* Y_j*.*

Usein ajatellaan, että kaksi alkiota jotka ovat ekvivalenttia, eli niiden muodostama pari kuuluu relaatioon $\sim$*, ovatkin "samat" jolloin joukon* X *sijasta tarkastellaan joukkoa* $\{\, Y_j : j \in J \,\}$*, jonka alkiot ovat ekvivalenssiluokat.*

Funktiot

Jos X *ja* Y *ovat joukkoja niin funktio* $f : X \to Y$ *on relaatio joukosta* X *joukkoon* Y *eli* $X \times Y$*:n osajoukko siten, että*

- *jokaisella* $x \in X$ *on olemassa* $y \in Y$ *siten, että* $[x, y] \in f$*.*
- *jos* $[x, y_1] \in f$ *ja* $[x, y_2] \in f$ *niin* $y_1 = y_2$*.*

Tavallisesti funktio esitetään siten, että $[x, y] \in f$ *jos ja vain jos* $y = f(x)$

(vaikka xf *tms. voisi olla parempi merkintätapa jos luetaan vasemmalta oikealle).*

Toisin sanoen, funktio f *joukosta* X *joukkoon* Y *on "sääntö", joka jokaisella* $x \in X$ *antaa vastaukseksi yksikäsitteisen alkion* $y = f(x)$ *joukosta* Y*.*

- *Jos* $f : X \to Y$ *on funktio niin* X *on sen määrittely- eli lähtöjoukko ja* Y *on sen maalijoukko.*
- $Y^X = \{\, f : f$ *on funktio joukosta* X *joukkoon* $Y \,\}$*.*
- *Jos* $f : X \to Y$ *on funktio ja* $A \subset X$ *niin* $f_{|A} : A \to Y$ *on funktio* f *rajoitettuna joukkoon* A *eli relaationa* $f_{|A} = \{\, [x, y] : [x, y] \in f, x \in A \,\}$*.*

Anonyymit funktiot

Voidaan puhua esim. luvusta 2 ilman sekaantumisen vaaraa, mutta jos puhutaan lausekkeesta $x+3$ ei ole välttämättä selvää tarkoitetaanko funktiota, joka antaa tulokseksi argumenttinsa johon on lisätty 3 vai tämän funktion arvo kun argumentti on x. Jos tarkoitetaan funktiota eikä sen arvoa niin voidaan kirjoittaa $x \mapsto x+3$ tai `@(x)x+2` *tai* `function(x){return x+3;}` *tai jotain muuta vastaavaa.*

Injektiot, surjektiot ja bijektiot

Funktio $f : X \to Y$ on

- *injektio jos $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$.*
- *surjektio jos kaikilla $y \in Y$ on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$.*
- *bijektio jos se on sekä injektio että surjektio.*

Ekvivalentti määritelmä on, että $f : X \to Y$ on injektio jos $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$ ja f on surjektio jos arvojoukko $f(X) = \{\, f(x) : x \in X \,\}$ on sama kuin maalijoukko Y eli $f(X) = Y$.

Yhdistetyt funktiot ja käänteisfunktiot

- *Jos $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ ovat kaksi funktiota niin $h = g \circ f : X \to Z$ on funktio $h(x) = g(f(x))$.*
- *Jos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ ja $h : Z \to W$ ovat funktioita niin $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ joten tämä funktio voidaan myös kirjoittaa muodossa $h \circ g \circ f$.*
- *Jos $f : X \to Y$ sellainen funktio, että on olemassa funktio $g : Y \to X$ siten että $(g \circ f)(x) = x$ ja $(f \circ g)(y) = y$ kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$ niin f on kääntyvä, g on f:n käänteisfunktio ja tavallisesti kirjoitetaan $g = f^{-1}$.*
- *Funktio $f : X \to Y$ on kääntyvä jos ja vain jos se on bijektio.*
- *Jos $f : X \to Y$ on kääntyvä niin $(f^{-1})^{-1} = f$ eli käänteisfunktio on myös kääntyvä ja sen käänteisfunktio on f.*

Huomaa ,ettei f^{-1} ole sama funktio kuin $h(x) = f(x)^{-1}$ joka edyllyttää että Y:n (tai ainakin arvojoukon) elementeillä on käänteeisalkioita mikä on esim. tilanne joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mutta ei joukossa $\mathbb{Z}$.

Ordo eli Iso-O: $f \in O(g)$

- *Jos g on funktio, joka on määritelty kaikilla "riittävän isoilla" kokonaisluvuilla niin $f \in O(g)$ kertoo että myös f on määritelty kaikilla "riittävän isoilla" kokonaisluvuilla ja on olemassa vakioita C_f ja N_f siten, että*

$$|f(n)| \leq C_f |g(n)|, \quad n \geq N_f.$$

- *Tämän merkinnän käyttö tarkoittaa myös sitä, ettei ole erityisen oleellista mitä vakiot C_f ja N_f oikeasti ovat tai miten pieniksi niitä voi valita.*
- *Usein kirjoitetaan $f \in O(g)$:n sijasta $f(n) = O(g(n))$ ja silloin merkinnällä $O(g)$ tarkoitetaan jokin funktio f , jolla on se ominaisuus, että $|f(n)| \leq C|g(n)|$ kun $n \geq N$.*
- *Jos $O(n) + O(n^2) \subseteq O(n^2)$ sijasta kirjoitetaan $O(n) + O(n^2) = O(n^2)$ niin pitää muistaa, ettei tästä seuraa $O(n) = 0$!*
- *Tässä käsitellään yksinkertaisuuden vuoksi vain (tietyillä) kokonaisluvuilla märiteltyjä funktioita ja ainoastaan mitä tapahtuu kun $n \to \infty$ mutta se ei ole mitenkään oleellista. Esimerkiksi pätee myös $\frac{x^4 - x^3}{x^3 + x^2} \in O(x)$ kun $x \to 0$.*

Joukon mahtavuus eli alkioiden lukumäärä

- *Kahdella joukolla A ja B on sama lukumäärä alkioita $|A|$ ja $|B|$ eli ne ovat yhtä mahtavia, jos on olemassa bijektio $A \to B$.*
- *Joukolla A on vähemmän tai yhtä monta alkiota kuin joukolla B, eli $|A| \leq |B|$, jos on olemassa injektio $A \to B$. Erityisesti, $|A| \leq |B|$ jos $A \subseteq B$.*
- *Joukolla A on vähemmän alkioita kuin joukolla B, eli $|A| < |B|$, jos on olemassa injektio $A \to B$ mutta ei bijektiota $A \to B$.*
- *Jos $A = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ niin $|A| = n$.*
- *Joukko A on äärellinen jos on olemassa $n \in \mathbb{N}_0$ siten, että $|A| = n$.*
- *Joukko A on numeroituva jos $|A| = |\mathbb{N}|$ ja ylinumeroituva jos $|A| > |\mathbb{N}|$.*

Huom!

Jotta nämä määritelmät olisivat järkeviä pitää osoittaa, että on olemassa bijektio $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ jos ja vain jos $m = n$ ja jos on olemassa injektioita $A \to B$ ja $B \to A$ niin löytyy myös bijektio $A \to B$.

Summaperiaate, yksinkertaisin muoto

Jos A ja B ovat kaksi (äärellistä) joukkoa siten, että $A \cap B = \emptyset$ niin

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Tästä seuraa, että jos $B \subseteq A$ niin $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

Tuloperiaate, yksinkertaisin muoto

Jos A ja B ovat kaksi (äärellistä) joukkoa niin

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Lokero- eli kyyhkyslakkaperiaate

Jos $m \geq 1$ esinettä laitetaan $n \geq 1$ lokeroon niin ainakin yhdessä lokerossa on vähintään $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ esinettä!

Miksi? Jos yhdessä lokerossa olevien esineiden lukumäärien maksimi on k niin $k \cdot n \geq m$ joten $k \geq \frac{m}{n}$ ja koska määritelmän mukaan $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ on pienin kokonaisluku joka on $\geq \frac{m}{n}$ niin $k \geq \lceil \frac{m}{n} \rceil$.

Seulaperiaate eli yleistetty summaperiaate

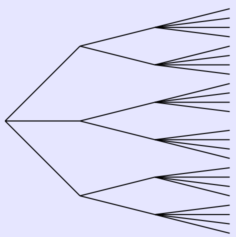
Jos A_j, $j = 1, 2, \ldots$ ovat äärellisiä joukkoja niin

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|, \\
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\
&\quad - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|, \\
\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right| &= \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq k} \left|\bigcap_{i=1}^{r} A_{j_i}\right|.
\end{aligned}$$

Tuloperiaate

Jos valinta- tai päätösprosessissa on k vaihetta ja vaiheessa j on n_j vaihtoehtoa, riippumatta siitä mitä valintoja tai päätöksiä on aikaisemmissa vaiheissa tehty, ja jos kaikki valinnat johtavat erilaisiin lopputuloksiin, niin kaikkien vaihtoehtojen lukumääräksi tulee

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$



$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

Toisin sanoen, jos

$$C = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_{2,x_1},\ \ldots, x_k \in A_{k,x_1,\ldots,x_{k-1}} \,\},$$

missä $|A_1| = n_1$, jokaisella $x_1 \in A_1$ pätee $|A_{2,x_1}| = n_2$ ja yleisesti jos $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_{2,x_1}$, $x_3 \in A_{3,x_1,x_2}$ jne., niin pätee $|A_{j,x_1,x_2,\ldots,x_{j-1}}| = n_j$, $1 \leq j \leq k$, niin silloin $|C| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Kertoma

Jos n on positiivinen kokonaisluku niin

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Lisäksi $0! = 1$.

Binomikerroin

Jos n ja k ovat kokonaislukuja siten, että $0 \leq k \leq n$ niin

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

jolloin $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Multinomikerroin

Jos $n_j \geq 0$ kun $j = 1, 2, \ldots, m$ ja $n = n_1 + n_2 + \ldots n_m$ niin

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}.$$

Järjestetty otos

A on joukko jossa on n alkiota (eli $|A| = n$).

- *Jos valitaan k alkiota joukosta A ja muodostetaan niistä jono $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ ja tehdään tämä* **palauttamatta**, *eli samaa alkiota ei valita monta kertaa jolloin $x_i \neq x_j$ kun $i \neq j$ niin saadaan ns. k-permutaatio. Näiden jonojen eli k-permutaatioiden lukumäärä on tuloperiaatteen nojalla*
$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- *Jos valitaan k alkiota joukosta A ja muodostetaan niistä jono $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ ja tehdään tämä* **palauttaen**, *eli voidaan valita sama alkio monta kertaa jolloin ainoa vaatimus on, että $x_j \in A$ kun $1 \leq j \leq k$ niin tuloperiaatteen nojalla näiden jonojen lukumäärä on*
$$|A|^k = n^k.$$

Huomaa, että molemmissa tapauksissa on oleellista että kyseessä on järjestetty otos eli sillä, missä järjestyksessä alkiot valitaan A:sta, on merkitystä.

Otos palauttamatta kun järjestystä ei oteta huomioon

Jos joukosta A, jossa on n alkiota, valitaan valitaan osajoukko johon kuuluu k alkiota, eli valitaan k alkiota palauttamatta, (jokaista alkiota voidaan valita korkeintaan kerran), eikä valintajärjestyksellä ole merkitystä niin vaihtoehtojen lukumäärä on
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Miksi? Jos kyseinen lukumäärä on $b(n,k)$ niin palauttamatta otettujen järjestettyjen otosten lukumäärä on $b(n,k) \cdot k!$ koska k alkiota voidaan järjestää jonoksi $k!$ eri tavalla. Näin ollen $b(n,k) \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ joten $b(n,k) = \binom{n}{k}$.

Otos palauttaen kun järjestystä ei oteta huomioon

Jos joukosta A, jossa on n alkiota, valitaan k alkiota palauttaen, eli voidaan valita sama alkio monta kertaa, eikä valintajärjestyksellä ole merkitystä niin vaihtoehtojen lukumäärä on
$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Miksi? Olkoon $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Kun valitsemme k alkiota, palauttaen, joukosta A eikä järjestyksellä ole merkitystä niin voimme esittää tuloksen esim. näin:
$$\underline{*}\ \underline{*}\ \underline{|}\ \underline{*}\ \underline{|}\ \underline{|}\ \underline{*}\ \underline{*}\ \underline{*}\ \underline{|}\ \underline{*}\ \underline{*}\ \underline{|}\ \underline{*}\ \underline{*}\ \underline{|}\ \underline{*}$$
Tämä on tulkittava siten, että olemme kaksi kertaa valinnet x_1:n, kerran x_2:n, ei kertaakaan x_3:ta, kolme kertaa x_4:n, kaksi kerta x_5:n ja kolme kertaa x_6:n joten tässä $n = 6$ ja $k = 2+1+0+3+2+3 = 11$. Jokainen valinta vastaa listaa missä on k alkiota $*$ ja $n-1$ erotusmerkkiä $|$, eli pituus on $k+n-1$, ja valitsemme jonosta ne $n-1$ paikkaa, joihin sijoitamme erotusmerkit $|$ jolloin alkiot $*$ sijoitetaan jäljelle jääviin paikkoihin (tai päinvastoin). Tämä on otos palauttamatta missä valintajärjestyksellä ei ole merkitystä

Otos palauttamatta, palauttaen, valintajärjestyksellä merkitystä, ei merkitystä: Yhteenveto

Valitaan k alkiota joukosta, jossa on n alkiota:

	palauttamatta	*palauttaen*
Valintajärjestyksellä on merkitystä	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Valintajärjestyksellä ei ole merkitystä	$\binom{n}{k}$	$\binom{k+n-1}{n-1}$

Allokointimallit eli vaihtoehtoinen ajattelutapa

On sijoitettava k palloa n:ään numeroituun laatikkoon.

- *Numeroidut pallot $\leftrightarrow$ Valintajärjestyksellä on merkitystä.*
- *Identtiset pallot $\leftrightarrow$ Valintajärjestyksellä ei ole merkitystä.*
- *Jokaiseen laatikkoon korkeintaan yksi pallo $\leftrightarrow$ Valinta palauttamatta.*
- *Jokaiseen laatikkoon mielivaltainen määrä palloja $\leftrightarrow$ Valinta palauttaen.*

	Pallojen lukumäärä laatikoissa	
	≤ 1	ei rajoituksia
Numeroidut pallot	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Identtiset pallot	$\binom{n}{k}$	$\binom{k+n-1}{n-1}$

Multinomikertoimet

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!} \qquad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m.$$

- $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ *on vaihtoehtojen lukumäärä kun joukko A jaetaan osajoukoiksi A_j, $j = 1, \ldots, m$ siten, että $\cup_{j=1}^m A_j = A$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ kun $i \neq j$, ja $|A_j| = n_j$.*
- $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ *on vaihtoehtojen lukumäärärä kun järjestetään n_1 oliota tyyppiä y_1, n_2 tyyppiä y_2 jne. missä $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ ja samaa tyyppiä olevat oliot ovat identtiset.*
- *Jos A on joukko, jossa on n alkiota ja $B = \{y_1, \ldots, y_m\}$ on joukko, jossa on m alkiota ja $n_1, n_2, \ldots, n_m$ ovat ei-negatiivisia lukuja siten, että $n_1 + n_2 + \ldots n_m = n$ niin $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ on niiden funktioiden $f : A \to B$ lukumäärä joille pätee $|\{\, x \in A : f(x) = y_j \,\}| = n_j$.*

Binomi- ja multinomikaavat

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j},$$

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_m=n \\ n_j \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{n_m}.$$

Miksi? Binomikaava on erikoistapaus multinomikaavasta koska $\binom{n}{j} = \binom{n}{j,n-j}$ ja multinomikaava pätee koska $(x_1 + \ldots + x_m)^n$ voidaan kirjoittaa summana jossa on m^n termiä jotka ovat tyyppiä $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$ missä jokainen $y_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Jokainen muotoa $x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{n_m}$ termi syntyy siitä, että joukko $\{1, \ldots, n\}$ jaetaan osajoukkoihin A_j, $j = 1, \ldots, m$ siten että $i \in A_j$ jos ja vain jos $y_i = x_j$ jolloin siis $|A_j| = n_j$. Tällaisia osituksia on täsmälleen $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ kappaletta.

Funktioiden lukumäärät

Oletetaan, että $|A| = m$ ja $|B| = n$.

- *Funktioden $A \to B$ lukumäärä on $|B^A| = n^m$.*
  Miksi? Funktio $f : A \to B$ on järjestetty m-kokoinen otos palauttaen joukosta jossa on n alkiota.
- *Injektioiden $A \to B$ lukumäärä on*
  $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$, $m \leq n$.
  Miksi? Injektio $A \to B$ on järjestetty m-kokoinen otos palauttamatta joukosta jossa on n alkiota.
- *Surjektioiden $A \to B$ lukumäärä on $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^m$.*

Osajoukkojen lukumäärä: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Jos joukossa A on m alkiota niin joukossa $\mathcal{P}(A)$ on 2^m alkiota, eli A:n osajoukkojen lukumäärä on $2^{|A|}$ koska jokaista osajoukkoa B vastaa funktio $f_B : A \to \{0,1\}$ siten, että $f_B(x) = 1$ jos $x \in B$ ja muuten 0.