Aalto-yliopisto

Gripenberg, Potka, Pöllänen, Tuhkanen, Ääri

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet
1. välikoe 1.10.2015

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1. Osoita induktiolla (vaikka se olisi mahdollista jollain muullakin tavalla), että

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^n \geq 1+\frac{n}{4}, \quad n \geq 1.$$

Ratkaisu: Väite $P(n)$ on tässä tapauksessa, että $(1+\frac{1}{4})^n \geq 1+\frac{n}{4}$ ja kun $n=1$ niin $(1+\frac{1}{4})^1 = 1+\frac{1}{4}$ joten $P(1)$ on tosi väite.

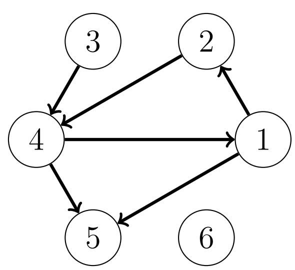
Oletamme seuraavaksi, että $P(k)$ on tosi eli $(1+\frac{1}{4})^k \geq 1+\frac{k}{4}$. Silloin

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{4}\right)^k \left(1+\frac{1}{4}\right) \overset{\text{Induktio-oletus}}{\geq} \left(1+\frac{k}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)$$
$$= 1+\frac{1}{4}+\frac{k}{4}+\frac{k}{16} \geq 1+\frac{1}{4}+\frac{k}{4} = 1+\frac{k+1}{4}.$$

Näin ollen myös $P(k+1)$ on tosi väite eli $P(k) \to P(k+1)$ pätee ja induktioperiaatteen nojalla voimme todeta, että $P(n)$ on tosi kaikilla $n \geq 1$.

---

2. Alla olevassa verkossa on esitetty relaatio W joukossa $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ siten, että solmusta i solmuun j on suunnattu kaari jos ja vain jos $[i,j] \in W$ (eli iWj).

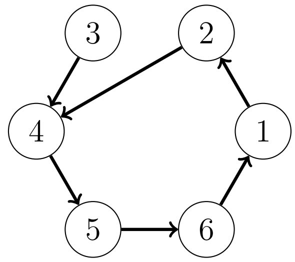


(a) Mitkä parit $[x,y]$ (missä x, $y \in X$) on esimerkiksi lisättävä ja mitkä poistettava tästä relaatiosta W jotta siitä tulisi funktio?

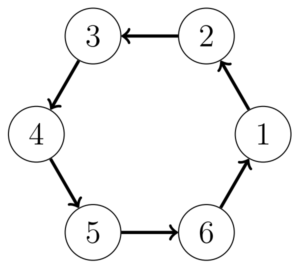
(b) Mitkä parit $[x,y]$ (missä x, $y \in X$) on esimerkiksi lisättävä ja mitkä poistettava tästä relaatiosta W jotta siitä tulisi funktio, joka lisäksi on surjektio?

Valitse molemmissa tapauksissa parit (eli suunnatut kaaret) niin, että tulee mahdollisimman vähän lisäyksiä ja poistoja, mutta sinun ei tarvitse osoittaa että näin todella on asian laita valinnoillasi.

Ratkaisu: (a) Kuvan relaatio ei ole funktio koska $[1,2]$ ja $[1,5]$ kuuluvat relaation ja samoin $[4,1]$ ja $[4,5]$ kuuluvat relaatioon joten poistamme esimerkiksi parit $[1,5]$ ja $[4,1]$. Näin saatu relaatio ei edelleenkään ole funktio koska ei löydy alkiota x siten, että $[5,x]$ kuuluisi relaatioon tai alkiota y siten, että $[6, y]$ kuuluisi relaatioon. Näin ollen lisäämme esimerkiksi parit $[5, 6]$ ja $[6, 5]$ ja silloin verkko näyttää seuraavanlaiselta:



(b) Jos ensin menettelemme kuten (a)-kohdassa ja poistamme parit $[1, 5]$ ja $[4, 1]$ sekä lisäämme parit $[5, 6]$ja $[6, 1]$ niin meillä ei vielä ole surjektiota koska ei ole alkoita x siten, että $[x, 3]$ kuuluisi relaation. Tämä on korjattavissa sillä tavalla, että lisäämme parin $[2, 3]$ mutta silloin joudumme poistamaan parin $[2, 4]$ koska muuten menettäisimme funktio-ominaisuuden. Tämän jälkeen verkko näyttää seuraavanlaiselta:



---

3. Perustele vastauksesi seuraaviin kysymyksiin:

(a) Päteekö $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ kaikilla joukoilla A, B ja C?
Jos vastaus on kielteinen, päteekö $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ kaikilla joukoilla A, B ja C?

(b) Seuraako oletuksista $f \in O(n^2)$ ja $g \in O(n)$, että $f + g \in O(n^2)$?

Ratkaisu: (a) Jos $A = B = C \neq \emptyset$ niin $B \setminus C = A \setminus B = \emptyset$ jolloin $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \emptyset = A \neq \emptyset$ mutta $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset \setminus C = \emptyset$ ja vastaus ensimmäiseen kysymykseen on kielteinen.

Jos sen sijaan $A = \emptyset$ niin $A \setminus (B \setminus C) = \emptyset$ samoin $A \setminus B = \emptyset$ jolloin $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$ ja vastaus toiseenkin kysymykseen on kielteinen.

(b) Jos $f \in O(n^2)$ niin on olemassa vakiot C_f ja N_f siten, että $|f(n)| \leq C_f|n^2|$ kun $n \geq N_f$ ja jos $g \in O(n)$ niin on olemassa vakiot C_g ja N_g siten, että $|g(n)| \leq C_g|n^2|$ kun $n \geq N_g$. Jos nyt $n \geq \max\{N_f, N_g\}$ niin $|n| \leq |n^2|$ ja

$$\begin{aligned}|(f+g)(n)| = |f(n) + g(n)| \leq |f(n)| + |g(n)| \leq C_f|n^2| + C_g|n| \\ \leq C_f|n^2| + C_g|n^2| \leq (C_f + C_g)|n^2|,\end{aligned}$$

eli $f + g \in O(n^2)$.

4.

(a) Kurssilla on 50 opiskelijaa koulutusohjelmasta A ja 40 opiskelijaa koulutusohjelmasta B. Monellako tavalla voidaan kurssin opiskelijoista muodostaa harjoitusryhmä, johon kuuluu 10 opiskelijaa koulutusohjelmasta A ja 8 opiskelijaa koulutusohjelmasta B?

(b) Laatikossa on 1 vihreä pallo, 19 sinistä palloa, 11 keltaista palloa ja 23 punaista palloa. Monellako tavalla voidaan poimia 9 palloa laatikosta, kun poimintajärjestyksellä ei ole merkitystä ja samanväriset pallot ovat identtiset?

Vastauksissasi saa numeroiden lisäksi olla potensseja, $\cdot$, $+$, !, (,) ja $/$ mutta ei esimerkiksi binomikertoimia.

Ratkaisu: (a) Koulutusohjelman A opiskelijoista voidaan valita 10 opiskelijaa $\binom{50}{10}$:lla eri tavalla ja koulutusohjelman B opiskelijoista voidaan valita 8 opiskelijaa $\binom{40}{8}$:lla eri tavalla joten kaikkien vaihtoehtojen lukumääräksi tulee tuloperiaatteen nojalla

$$\binom{50}{10}\cdot\binom{40}{8} = \frac{50!\cdot 40!}{10!\cdot 40!\cdot 8!\cdot 32!} = \frac{50!}{10!\cdot 8!\cdot 32!} = 789986316896226450.$$

(b) Koska laatikossa on vain yksi vihreä pallo niin voimme ainostaan poimia joko yhden vihreän pallon jolloin me poimimme 8 muunväristä palloa tai emme poimi yhtään vihreätä palloa jolloin poimimme 9 muunväristä palloa. Nämä vaihtoehdot ovat toisiaan poissulkevia ja koska samanväristen (ei-vihreiden) pallojen lukumäärälle ei ole rajoituksia niin kyse on valinnasta palauttaen ja koska muita värejä kuin vihreä on 3 kappaletta niin vaihtoehtojen lukumääräksi tulee

$$\binom{3-1+8}{3-1}+\binom{3-1+9}{3-1} = \binom{10}{2}+\binom{11}{2} = \frac{10\cdot 9}{2}+\frac{11\cdot 10}{2} = 45+55 = 100.$$
