Aalto-yliopisto

Gripenberg, Potka, Pöllänen, Tuhkanen, Ääri

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet
Tentti ja välikokeiden uusinta 10.11.2015

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.
Tentin tehtävät ovat 1, 3, 5, 6 ja 7.
Uusintavälikokeiden tehtävät ovat: 1. vk: 1–4, 2. vk: 5–8.
Vastauksissasi saa numeroiden lisäksi olla potensseja, $\cdot$, $+$, $!$, $($, $)$ ja $/$ mutta ei esimerkiksi binomikertoimia.

1. Osoita induktiolla että

$$2 + 6 + 12 + \ldots + n(n-1) = \sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}, \quad n \geq 2.$$

Ratkaisu: Kun $n = 2$ niin $\sum_{j=2}^{n} j(j-1) = 2(2-1) = 2$ ja $\frac{n(n^2-1)}{3} = \frac{2(4-1)}{3} = 2$ joten väite pätee.

Jos $n = k \geq 2$ niin

$$\sum_{j=2}^{k+1} j(j-1) = \sum_{j=2}^{k} j(j-1) + (k+1)(k+1-1) \overset{\text{induktio-oletus}}{=} \frac{k(k^2-1)}{3} + (k+1)k$$
$$= \frac{k(k+1)(k-1)}{3} + (k+1)k = \frac{(k+1)(k^2-k+3k)}{3}$$
$$= \frac{(k+1)(k^2+2k+1-1)}{3} = \frac{(k+1)((k+1)^2-1)}{3}$$

eli väite pätee myös kun $n = k+1$.

Induktioperiaatteen nojalla väite pätee silloin kaikilla $n \geq 2$.

---

2. Relaatio W joukossa $\mathbb{Z}$ on

$$W = \left\{ [m,n] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \exists k (k \in \mathbb{Z} \textbf{ AND } m = k^2 \cdot n) \right\}.$$

Mitkä ekvivalenssirelaation vaatimuksista (refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisyys) tämä relaatio toteuttaa? Perustele!

Ratkaisu: Relaatio on refleksiivinen koska $m = 1^2 \cdot m$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}$. Se ei sen sijaan ole symmetrinen koska esimerkiksi $[12,3] \in W$ koska $12 = 2^2 \cdot 3$ mutta $3 \neq k^2 \cdot 12$ kaikilla kokonaisluvulla k joten $[3,12] \notin W$. Relaatio on transitiivinen koska jos $[m,n]$ ja $[n,q] \in W$ niin on olemassa kokonaisluvut k_1 ja k_2 siten, että $m = k_1^2 \cdot n$ ja $n = k_2^2 \cdot q$ jolloin $m = k_1^2 \cdot k_2^2 \cdot q = (k_1 \cdot k_2)^2 \cdot q$ josta seuraa, että $[m,q] \in W$ koska $k_1 \cdot k_2$ on kokonaisluku.

3.

(a) Funktiot $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ ovat sellaisia, että yhdistetty funktio $g \circ f : X \to Z$ on injektio. Onko f välttämättä injektio ja onko g välttämättä injektio? Perustele!

(b) Joukossa A on 6 alkiota ja joukossa B on 10 alkiota. Montako injektiota $f : A \to B$ on olemassa?

Ratkaisu: (a) Jos f ei ole injektio niin on olemassa x_1 ja $x_2 \in X$ siten, että $x_1 \neq x_2$ mutta $f(x_1) = f(x_2)$ jolloin $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$, eli $f \circ g$ ei myöskään ole injektio joten jos $f \circ g$ on injektio niin silloin f on välttämättä myös injektio.

Mutta jos $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, mutta $g(2) = 1$ niin g ei ole injektio mutta $g \circ f$ on injektio.

(b) Injektioiden lukumäärä on $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ koska jos $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$ niin voimme valita $f(x_1)$:n 10:llä eri tavalla, sen jälkeen voimmen valita $f(x_2)$:n 9:llä eri tavalla jne.

4.

(a) Kolikko heitetään 10 kertaa ja tuloksista kirjataan kruunien ja klaavojen jono. Montako tällaista jonoa on, jossa on korkeintaan 4 kruunaa?

(b) Varastohuoneessa on 6 hyllyä. Monellako tavalla voidaan sijoittaa 7 identtistä (ja hyvin pientä) laatikkoa hyllyille?

Ratkaisu: (a) Jos jonossa on k kruunaa niin niiden paikat jonossa voidaan valita $\binom{10}{k}$ eri tavalla koska valitsemisjärjestyksellä ei ole väliä. Näin ollen jonoja, joissa on korkeintaan 4 kruunaa on

$$\begin{aligned}\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} &= 1 + 10 + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= 1 + 10 + 45 + 120 + 210 = 386.\end{aligned}$$

(b) Tässä on 7 kertaa valittava hylly, jolle laatikko sijoitetaan ja koska voimme valita saman hyllyn monta kertaa kyse on valinnasta takaisinpanolla eikä valintajärjestyksellä ole merkitystä koska laatikot ovat identtiset joten vaihtoehtojen lukumääräksi tulee

$$\binom{6-1+7}{7} = \binom{6-1+7}{6-1} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792.$$

---

5. Lukujen 49 ja 17 suurin yhteinen tekijä on 1 koska Eukleideen algoritmin avulla saamme

$$\begin{aligned} 49 &= 2 \cdot 17 + 15, \\ 17 &= 1 \cdot 15 + 2, \\ 15 &= 7 \cdot 2 + 1, \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Määritä tämän laskun avulla $[17]_{49}^{-1}$.

Ratkaisu: Eukleideen algoritmin tulosten perusteella saamme

$$\begin{aligned}1 &= 15 - 7 \cdot 2 = 15 - 7 \cdot (17 - 1 \cdot 15) \\ &= -7 \cdot 17 + 8 \cdot 15 = -7 \cdot 17 + 8 \cdot (49 - 2 \cdot 17) \\ &= 8 \cdot 49 - 23 \cdot 17.\end{aligned}$$

Tästä voimme päätellä, että

$$[17]_{49}^{-1} = [-23]_{49} = [-23 + 49]_{49} = [26]_{49}.$$

6.

(a) Joukko $\{\, [j]_8 : 1 \leq j \leq 7, \text{syt}\,(j, 8) = 1 \,\}$ jossa laskutoimituksena on jäännösluokkien kertolasku (modulo 8) on ryhmä. Onko tämä ryhmä syklinen? Perustele!

(b) Mistä nähdään, että $\zeta_{G,X}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6}\big(t_1^8 + 4t_1^2 t_2^3 + 2t_3^2\big)$ ei voi olla ryhmän G sykli-indeksi sen toiminnassa joukossa X?

Ratkaisu: (a) Nyt $\{\, [j]_8 : 1 \leq j \leq 7, \text{syt}\,(j, 8) = 1 \,\} = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$ ja koska

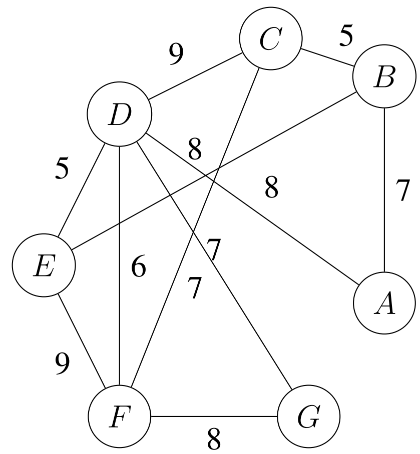
$$\begin{aligned}&[1]_8 \cdot [1]_8 = [1]_8, \\ &[3]_8 \cdot [3]_8 = [9]_8 = [1]_8, \\ &[5]_8 \cdot [5]_8 = [25]_8 = [1]_8, \\ &[7]_8 \cdot [7]_8 = [49]_8 = [1]_8,\end{aligned}$$

niin näemme ettei joukossa ole alkiota a, siten että jokainen joukon alkio olisi a:n jokin potenssi (koska jokaisen alkion potenssi on joko alkio itse tai $[1]_8$). Näin ollen ryhmä ei ole syklinen.

(b) Termien t_1^8 ja $4t_1^2 t_2^3$ mukaan joukossa X olisi $1 \cdot 8 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$ alkiota mutta termin $2t_2^3$ mukaan siinä olisi ainoastaan $2 \cdot 3 = 6$ alkiota. Toinen syy on, että $\zeta_{G,X}(1, 1, 1) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 2) = \frac{7}{6}$ kun vastaukseksi pitäisi tulla 1, muun muassa siitä syystä, että joukon alkioita voidaan ”värittää” yhdellä värillä ainostaan yhdellä tavalla.

---

7. Määritä alla olevan verkon minimaalinen virittävä puu käyttämällä algoritmia, joka varmasti antaa optimaalisen tuloksen (mutta sinun ei tarvitse osoittaa, että algoritmi antaa optimaalisen tuloksen). Selitä miten olet menetellyt, esimerkiksi kirjoittamalla missä järjestyksessä olet valinnut kaaret puuhun.



Kaarien painot ovat seuraavat:

$$w(\{A,B\}) = 7, \quad w(\{B,C\}) = 5, \quad w(\{C,D\}) = 9, \quad w(\{D,E\}) = 5,$$
$$w(\{E,F\}) = 9, \quad w(\{F,G\}) = 8, \quad w(\{A,D\}) = 8, \quad w(\{B,E\}) = 8,$$
$$w(\{C,F\}) = 7, \quad w(\{D,F\}) = 6, \quad w(\{D,G\}) = 7.$$

Ratkaisu: Jos käytämme Primin algortimia eli aloitamme mielivaltaisesta solmusta ja sitten lisäämme kaaren jo kontruoidun puun ja jonkin muun solmun välillä siten, että tämän kaaren paino on mahdollisimman pieni ja jos ensimmäiseksi solmuksi valitsemme A:n niin aliverkot ovat seuraavat:

$$\begin{aligned}
&[\{A\}, \emptyset], \\
&[\{A,B\}, \{\{A,B\}\}], \\
&[\{A,B,C\}, \{\{A,B\}, \{B,C\}\}], \\
&[\{A,B,C,F\}, \{\{A,B\}, \{B,C\}, \{C,F\}\}], \\
&[\{A,B,C,F,D\}, \{\{A,B\}, \{B,C\}, \{C,F\}, \{F,D\}\}], \\
&[\{A,B,C,F,D,E\}, \{\{A,B\}, \{B,C\}, \{C,F\}, \{F,D\}, \{D,E\}\}], \\
&[\{A,B,C,F,D,E,G\}, \{\{A,B\}, \{B,C\}, \{C,F\}, \{F,D\}, \{D,E\}, \{D,G\}\}].
\end{aligned}$$

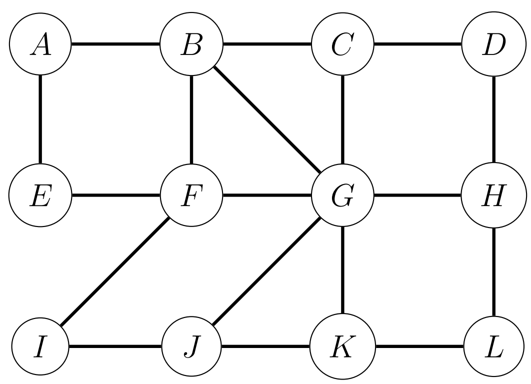
Jos käytämme Kruskalin algoritmia, jonka mukaan aina valitsemme joka vaiheessa kaaren, jonka paino on mahdollisimman pieni siten, että konstruoitu aliverkko pysyy metsänä niin saamme esimerkiksi seuraavat aliverkot:

$$[\{B,C\},\{\{B,C\}\}],$$
$$[\{B,C,D,E\},\{\{B,C\},\{D,E\}\}],$$
$$[\{B,C,D,E,F\},\{\{B,C\},\{D,E\},\{D,F\}\}],$$
$$[\{A,B,C,D,E,F\},\{\{B,C\},\{D,E\},\{D,F\},\{A,B\}\}],$$
$$[\{A,B,C,D,E,F,G\},\{\{B,C\},\{D,E\},\{D,F\},\{A,B\},\{C,F\}\}],$$
$$[\{A,B,C,D,E,F,G\},\{\{B,C\},\{D,E\},\{D,F\},\{A,B\},\{C,F\},\{D,G\}\}].$$

8.

(a) Osoita, että jos suuntaamattomassa verkossa $[V,E]$ missä $|V| = n$ jokaisen solmun naapureiden lukumäärä on suurempi kun $\frac{n}{2}$, niin verkko on yhtenäinen.

(b) Määritä alla olevassa verkossa joko Eulerin polku tai Hamiltonin polku.



Ratkaisu: (a) Verkon solmut voidaan jakaa pistevieraisiin osajoukkoihin siten, että kaksi solmua kuuluvat samaan osajoukkoon jos ja vain jos niiden välillä on polku verkossa. (Eli kyseiset joukot ovat ekvivalenssiluokat kun ekvivalenssirelaatio on että solmujen välillä on polku.) Jos verkko ei ole yhtenäinen niin löytyy ainakin yksi tällainen (ei-tyhjä) joukko V_0, jossa on korkeintaan $\frac{n}{2}$ solmua. Valitaan tästä joukosta mielivaltainen solmu a. Koska $|V_0| \leq \frac{n}{2}$ niin a:lla on vähintään $|V_0| + 1$ naapuria, eli ainakin yksi naapuri ei kuulu joukkoon V_0. Mutta tämä on ristiriita koska silloin on polku V_0:n solmusta a solmuun joka ei kuulu V_0:aan. Koska oletus, että verkko ei ole yhtenäinen johtaa ristiriitaan, olemme osoittaneet, että verkko on yhtenäinen.

(b) Verkossa ei ole Eulerin polkua mutta esimerkiksi

$$[A,B,C,D,H,L,K,G,J,I,F,E],$$

on Hamiltonin polku.
