Aalto-yliopisto

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet — GG, EH, TH, PK, JT, LT, VÄ
Harjoitus 5
10–14.10.2016, viikko 41

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 17.10.2016 klo. 16.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Funktio $\alpha : \{0, 1, \ldots, 12\} \to \{0, 1, 2 \ldots, 12\}$ joka on määritelty kaavalla $\alpha(x) = \operatorname{mod}(3 \cdot x, 13)$ on bijektio (koska syt $(3, 13) = 1$). Esitä α syklien tulona (eli yhdistettynä funktiona) ja määritä α:n radat eli joukot $\{\, \alpha^j(x) : j \geq 0 \,\}$ missä $x \in \{0, 1, \ldots, 12\}$ ja $\alpha^j = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{j}$.

Vihje: Esimerkiksi sykli $\beta = (1\ 2\ 4)$ on bijektio joka toteuttaa ehdot $\beta(1) = 2$, $\beta(2) = 4$ ja $\beta(4) = 1$ ja $\beta(x) = x$ kaikilla muilla x ja sen radat ovat $\{1, 2, 4\}$ ja joukot $\{x\}$ kaikilla $x \in \{0, 1, \ldots, 12\} \setminus \{1, 2, 4\}$.

P2.

(a) Laske, esimerkiksi luettelemalla kaikki vaihtoehdot, monellako tavalla voidaan jakaa 3 punaista ja 2 keltaista ilmapalloa viidelle henkilölle siten, että jokainen saa joko punaisen tai keltaisen pallon ja kaksi viimeistä saavat samanväriset ilmapallot.

(b) Osoita, että (a)-kohdan vastaus on termin p^3k^2 kerroin lausekkeessa $(p + k)^3(p^2 + k^2)$.

(c) Laske, määrittämällä termin p^3k^4 kerroin sopivassa lausekkeessa (joka on samankaltainen kuin (b)-kohdan lauseke), monellako tavalla voidaan jakaa 3 punaista ja 4 keltaista ilmapalloa seitsemälle henkilölle siten että jokainen saa joko punaisen tai keltaisen pallon ja kaksi ensimmästä saavat samanväriset ilmapallot ja samoin kolme viimeistä saavat myös samanväriset pallot.

Vastaus: 4 ja 3

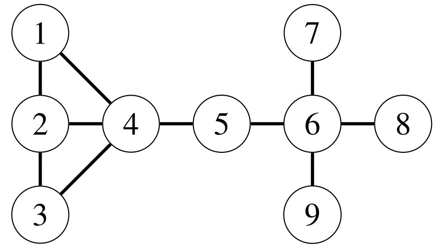
P3. Määritä Pólyan lauseen avulla montako erilaista helminauhaa voidaan valmistaa käyttämällä 4 valkoista ja 4 mustaa helmeä. Tässä kaksi helminauhaa pidetään samoina jos toinen saadaan toisesta rotaatiolla ja/tai peilauksella, toisin sanoen, symmetriaryhmä on diedriryhmä. Diedriryhmän D_n, joka muodostuu säännöllisen n-kulmaisen monikulmion X_n rotaatioista ja peilauksista, sykli-indeksi on

$$\zeta_{D_n, X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \left(\frac{1}{2n} \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \varphi(d) t_d^{\frac{n}{d}} \right) + \begin{cases} \frac{1}{4}\left(t_2^{\frac{n}{2}} + t_1^2 t_2^{\frac{n}{2}-1} \right), & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ \frac{1}{2} t_1 t_2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

missä $\varphi(d)$ on Eulerin funktio eli $\varphi(d) = |\{\, j \in \mathbb{Z} : 0 \leq j \leq d - 1,\ \text{syt}\,(j, d) = 1 \,\}|$.

Vastaus: 8

P4. Määritä ryhmä G, joka muodostuu kaikista alla olevan verkon



solmujen permutaatioista a siten, että jos solmujen x ja y välillä on kaari (eli x ja y ovat naapureita), niin myös solmujen $a(x)$ ja $a(y)$ on kaari, (eli nekin ovat naapureita).

Määritä myös ryhmän sykli-indeksi $\zeta_{G,X} = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\zeta_{a,X}$ missä $\zeta_{a,X}(t_1,\ldots,t_n) = t_1^{j_1}\cdot t_2^{j_2}\cdot\ldots\cdot t_n^{j_n}$ kun j_k on permutaation a k-pituisten ratojen lukumäärä.

Vihje: Jos a on tällainen permutaatio niin $a(x)$:lla on yhtä monta naapuria kuin x:lla joten päättele ensin mitä voit sanoa solmusta $a(x)$ kun $x = 2, 4, 5$ ja 6.

Vastaus: $\zeta_{G,X}(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{12}\cdot\left(t_1^9 + 4\cdot t_1^7\cdot t_2 + 3\cdot t_1^5\cdot t_2^2 + 2\cdot t_1^6\cdot t_3 + 2\cdot t_1^4\cdot t_2\cdot t_3\right)$

P5. Jos $[G,\bullet]$ on ryhmä ja X on jokin joukko niin ryhmän vasen toiminta joukossa X on funktio ψ joukosta G joukon X kaikkien permutaatioden ryhmään siten, että $\psi(a\bullet b)(x) = \psi(a)(\psi(b)(x))$.
Tässä tehtävässä $X = G$.

(a) Osoita, että jos $a\in G$ ja määrittelemme funktion $\psi(a): G\to G$ siten, että $\psi(a)(x) = a\bullet x\bullet a^{-1}$ niin $\psi(a)$ on bijektio eli permutaatio.

(b) Osoita, että (a)-kohdassa määritelty funktio ψ on ryhmän $[G,\bullet]$ vasen toiminta joukossa G.

(c) Jos $[G,\bullet]$ on joukon $\{1,2,3\}$ permutaatioiden muodostama ryhmä ja a on permutaatio $(1\ 2\ 3)$ niin määritä $\psi(a)(x)$ kun x on permutaatio $(1\ 2)$.

Vihje: Muista (c)-kohdassa, että $(a\bullet b)^{-1} = b^{-1}\bullet a^{-1}$.