Aalto-yliopisto

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet

GG, EH, TH, PK, JT, LT, VÄ

Harjoitus 1

12–16.9.2016, viikko 37

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 19.9.2016 klo. 16.

Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Mitä voidaan sanoa joukoista A ja B jos tiedetään, että

(a) $A \cup B = A$?

(b) $A \setminus B = A$?

(c) $A \cap B = B \cap A$?

(d) $A \setminus B = B \setminus A$?

P2. Mitkä alkiot kuuluvat joukkoon

(a) $\{\, x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z}(n < 3 \text{ AND } x^2 = n) \,\}$?

(b) $\{\, n \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_+(m^2 < 10 \to \exists p \in \mathbb{N}_0(m \cdot n \cdot p = 24 \text{ OR } m \cdot n \cdot p = 42)) \,\}$?

(c) $\displaystyle\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left[n - \frac{n}{m}, n^2 \right]$?

Tässä siis $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko, $\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen joukko, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ on ei-negatiivisten ja $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ on positiivisten kokonaislukujen joukko. Muista myös, ettei leikkauksessa $\cap_{m=1}^{\infty} A_m$ eikä unionissa $\cup_{n=m}^{\infty} B_n$ oteta arvoja $m = \infty$ ja $n = \infty$ huomioon.

P3. Osoita induktiolla, että

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} < \frac{n^2}{n+1}, \quad n \geq 2.$$

Vihje: Muista, että $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$ tai että jos sinun pitää osoittaa, että $a < b$ missä a ja b ovat kaksi lauseketta, niin voi olla yksinkertaisempaa osoittaa, että $a - b < 0$.

P4. Oleta että A ja B ovat joukon Ω osajoukkoja (jolloin esim. $B^c = \Omega \setminus B = \{\, x \in \Omega : x \notin B \,\}$). Päteekö

$$B = \emptyset \quad \leftrightarrow \quad (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap B^c$$

Perustele!

Vihje: Oleta ensin, että $B = \emptyset$ ja tarkista ovatko oikealla puolella olevat joukot silloin samat eli sievennä molemmat lausekkeet. Jos ne eivät ole samat niin asia on selvä eikä väite päde. Muussa tapauksessa sinun pitää tarkistaa mikä tilanne on jos $B \neq \emptyset$ eli on olemassa alkio $x \in B$ eli tarkista voiko x kuulua sekä joukkoon $(A \cap B^c) \cup B$ että joukkoon $(A \cup B) \cap B^c$. (Muista, että $P \leftrightarrow Q$ on tosi jos ja vain jos $P \to Q$ ja $(\text{NOT } P) \to (\text{NOT } Q)$.)

P5.

(a) Osoita kontrapositiivisella päättelyllä, että väite ”Kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pätee, että jos x on irrationaaliluku niin $1/x$ on irrationaaliluku” on tosi.

(b) Osoita, että väite ”On olemassa kokonaisluku n siten, että $n = a^2$ ja $n + 2 = b^2$ missä a ja b ovat kokonaislukuja” on epätosi epäsuoralla päättelyllä, eli oleta että väite on tosi ja johda siitä ristiriita.

Vihje: Kontrapositiivinen päättely tarkoittaa, että sen sijaan, että osoitetaan, että $p \to q$ *on tosi osoitetaan, että* NOT $q \to$ NOT p *on tosi. Jos halutaan osoittaa, että jokin väite pätee jonkin joukon kaikilla alkioilla riittää osoittaa, että se pätee mielivaltaisella alkiolla. Irrationaaliluku on siis reaaliluku, joka ei ole rationaaliluku, eli ei ole muotoa* m/n *missä* m *ja* n *ovat kokonaislukuja ja* $n \neq 0$.