Aalto-yliopisto

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet

Gripenberg, Potka, Pöllänen, Tuhkanen, Ääri

Harjoitus 5

5–9.10.2015, viikko 41

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 12.10.2015 klo. 16.

Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

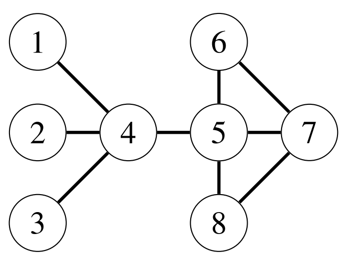
P1. Funktio $\alpha : \{0, 1, \ldots, 13\} \to \{0, 1, 2 \ldots, 13\}$, joka on määritelty kaavalla $\alpha(x) = \mathrm{mod}\,(3 \cdot x, 14)$ on bijektio (koska syt $(3, 14) = 1$).

(a) Määritä α:n radat eli joukot $\{\, \alpha^j(x) : j \geq 0 \,\}$ kun $x \in \{0, 1, \ldots, 13\}$ missä $\alpha^j = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{j}$.

(b) Kirjoita α syklien tulona.

Vihje: Esimerkiksi sykli $\beta = (1\ 2\ 4)$ on bijektio joka toteuttaa ehdot $\beta(1) = 2$, $\beta(2) = 4$ ja $\beta(4) = 1$ ja $\beta(x) = x$ kaikilla muilla x ja sen radat ovat $\{1, 2, 4\}$ ja joukot $\{x\}$ kaikilla $x \in \{0, 1, \ldots, 13\} \setminus \{1, 2, 4\}$.

P2. Määritä ryhmä G, joka muodostuu kaikista alla olevan verkon



solmujen permutaatioista f siten, että jos solmujen a ja b välillä on kaari (eli a ja b ovat naapureita), niin myös solmujen $f(a)$ ja $f(b)$ välillä on kaari, (eli nekin ovat naapureita).

Määritä myös ryhmän sykli-indeksi $\zeta_{G,X} = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} \zeta_{f,X}$ missä $\zeta_{f,X}(t_1, \ldots, t_n) = t_1^{j_1} \cdot t_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot t_n^{j_n}$ kun j_k on permutaation f k-pituisten ratojen lukumäärä.

Vihje: Jos f on tällainen permutaatio niin $f(a)$:lla on yhtä monta naapuria kuin a:lla.

Vastaus: $\zeta_{G,X}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{12}\left(t_1^8 + 4t_1^6 t_2 + 3t_1^4 t_2^2 + 2t_1^5 t_3 + 2t_1^3 t_2 t_3\right)$

P3.

(a) Laske, esimerkiksi luettelemalla kaikkia vaihtoehdot, monellako tavalla voidaan jakaa 3 punaista ja 2 sinistä ilmapalloa viidelle henkilölle siten että jokainen saa joko punaisen tai sinisen pallon ja kaksi ensimmäistä saavat samanväriset ilmapallot.

(b) Osoita, että saat (a)-kohdan vastauksen laskemalla termin $p^3 s^2$ kerroin lausekkeessa $(p^2 + s^2)(p + s)^3$.

(c) Laske, määrittämällä termin $p^5 s^4$ kerroin sopivassa lausekkeessa (joka on samankaltainen kuin (b)-kohdan lauseke), monellako tavalla voidaan jakaa 5 punaista ja 4 sinistä ilmapalloa yhdeksälle henkilölle siten että jokainen saa joko punaisen tai sinisen pallon ja kaksi ensimmäistä saavat samanväriset ilmapallot ja samoin kolme seuraavaa saavat myös samanväriset pallot.

P4. Montako erilaista helminauhaa voidaan valmistaa käyttämällä 3 valkoista ja 6 mustaa helmeä. Tässä kaksi helminauhaa pidetään samoina jos toinen saadaan toisesta rotaatiolla ja/tai peilauksella, toisin sanoen, symmetriaryhmä on diedriryhmä. Muista, että diedriryhmän D_n, joka muodostuu säännöllisen n-kulmaisen monikulmion rotaatioista ja peilauksista, sykli-indeksi on

$$\zeta_{D_n,\mathbb{N}_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)t_d^{\frac{n}{d}}\right) + \begin{cases} \frac{1}{4}\left(t_2^{\frac{n}{2}} + t_1^2 t_2^{\frac{n}{2}-1}\right), & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ \frac{1}{2}t_1 t_2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

missä $\varphi(d)$ (Eulerin funktio) on niiden lukujen j lukumäärä, joille pätee että $0 \leq j \leq d-1$ ja $[j]_d$:llä on käänteisalkio joukossa $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, eli $\varphi(d) = |\{\, j \in \mathbb{Z} : 0 \leq j \leq d-1,\ \text{syt}\,(j,d) = 1\,\}|$.

Vastaus: 7

P5. Symmetrinen ryhmä S_3 sisältää kaikki joukon $\{1,2,3\}$ permutaatiot eli $S_3 = \{(1),(1\ 2),(1\ 3),(2\ 3),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$ missä on käytetty syklimerkintöjä.

(a) Osoita, että $H = \{(1),(1\ 2)\}$ on S_3:n aliryhmä, eli että H:n alkioiden tulot (eli yhdistetyt funktiot) kuuluvat H:hon ja muista, että (1) on neutraalialkio.

(b) Määritä H:n vasemmat sivuluokat aH, $a \in S_3$ eli määritä joukot $\{a(1), a(1\ 2)\}$ kaikilla $a \in S_3$.

(c) Määritä (b)-kohdan tulosten avulla alkiot a, b, c ja $d \in S_3$ siten, että $aH = bH$ ja $cH = dH$ mutta $acH \neq bdH$.

Vihje: Muista, että kun lasket esimerkiksi tulon $(a\ b)(c\ d\ e)$ niin lasket yhdistetyn funktion $f \circ g$ (eli "ensin g sitten f") missä $f(a) = b$, $f(b) = a$ ja $f(x) = x$ muilla x sekä $g(c) = d$, $g(d) = e$ ja $g(e) = c$.

Huom! *(c)-kohdan tuloksesta seuraa ettei ole mahdollista määritellä operaatio $\diamond$ vasemmilla sivuluokilla siten, että $(xH) \diamond (yH) = xyH$. Jos laskisit oikeat sivuluokat Ha, $a \in S_3$ niin tulisit huomaamaan, että nämä eivät ole samat kuin vasemmat sivuluokat ja tämä aliryhmä H ei siis ole ns. normaali aliryhmä!*